

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 4. **Обернена пропорційність. Розв'язування дробово-раціональних рівнянь. Розв'язування дробово-раціональних нерівностей**

План уроку

1. Обернена пропорційність та її графік.
2. Дослідження дробово-раціональної функції, чисельники та знаменники якої є багаточленами першого степеня.
3. Дробово-раціональні рівняння.
4. Дробово-раціональні нерівності.
5. Інтервали знакосталості оберненої пропорційності.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 MAO 1.1.1–2];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 MAO 2.1.3–2];

самостійно або у співпраці з іншими обирає математичну модель розв'язання проблемної ситуації з урахуванням різних умов, зокрема бажаної точності результату та ресурсів, необхідних для застосування цієї моделі, на засадах ощадливості та поміркованості [12 MAO 3.2.2–1];

оперує математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 MAO 4.2.2–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.
- 2) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 3) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 4) Обирайте кількість запропонованого матеріалу на власний розсуд.

5) Виділіть час на розв'язування тренувальних вправ як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\frac{x}{9-x} = \frac{1}{2}$. (ЗНО, 2021 р.)

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]$	$(-5; -2]$	$(-2; 2]$	$(2; 5]$	$(5; +\infty)$

Відповідь. Г.

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\frac{x}{18-2x} = \frac{1}{4}$. (НМТ, 2023 р.)

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; 0)$	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; +\infty)$

Відповідь. В.

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \leq -x$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$

Відповідь. Г.

4. Спростіть вираз $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$. (ЗНО, 2007 р.)

А	Б	В	Г	Д
$a+b$	ab	$\frac{ab}{a+b}$	$ab(a+b)$	$\frac{ab}{a^2-b^2}$

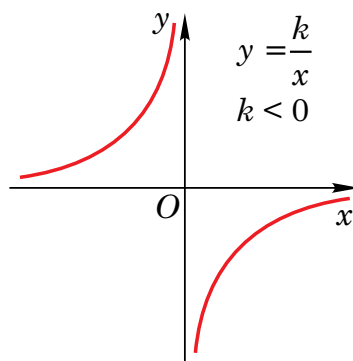
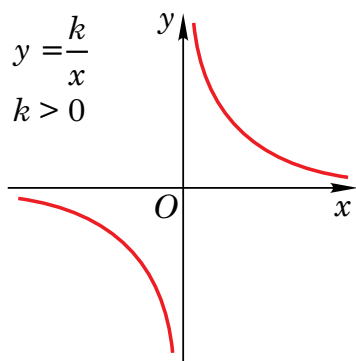
Відповідь. В.

III. Функція оберненої пропорційності та її графік

Означення. Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, де x і y — змінні, k — число, називають **оберненою пропорційністю**.

Графіком функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, є гіпербола. Графік не перетинає осей координат.

Розташування гіперболи на координатній площині залежить від знака коефіцієнта k .



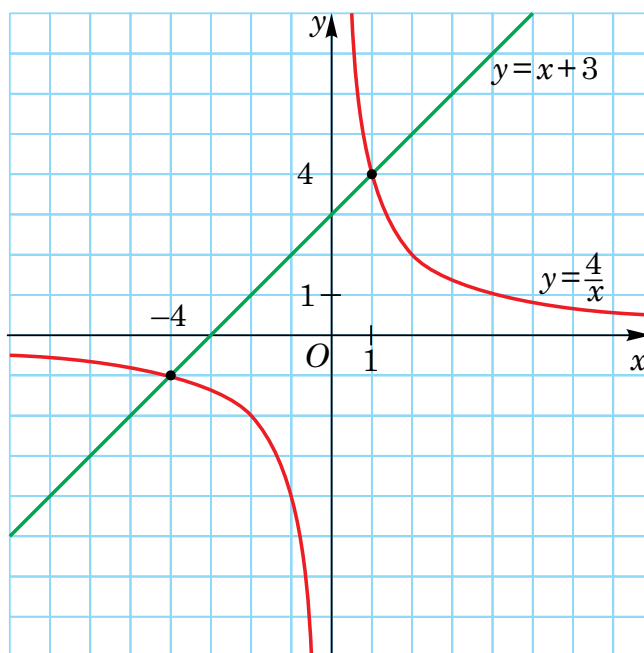
Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множина значень функції: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ілюстративний приклад (3–4 хв)

5. Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

Розв'язання. Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій.



Графіки перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють -4 і 1 . Виконаємо перевірку й отримаємо, що -4 і 1 — корені рівняння.

Відповідь. -4 ; 1 .

IV*. Дослідження дробово-раціональної функції, чисельники та знаменники якої є багаточленами першого степеня

Означення	Дробово-раціональною функцією, яка є відношенням двох лінійних функцій, називається функція вигляду: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d — будь-які дійсні числа, при цьому $c \neq 0$ або $d \neq 0$.
Область визначення	Функція визначена для всіх дійсних чисел, окрім тих значень, що перетворюють знаменник у нуль: $cx + d \neq 0, x \neq -\frac{d}{c}$.
Асимптоти	Вертикальна асимптота: $x = -\frac{d}{c}$. Горизонтальна асимптота $y = \frac{a}{c}$, якщо $a \neq 0$, і $y = 0$, якщо $a = 0$.
Нуль функції (корінь чисельника)	$ax + b = 0, x = -\frac{b}{a}$.
Графік	Графіком функції є гіпербола, розташована або в I та III чвертях, або в II та IV чвертях — залежно від знака відношення $\frac{a}{c}$.
Алгоритм побудови графіка	1) Знайдіть число $x = -\frac{d}{c}$, яке не належить області визначення функції. 2) Побудуйте вертикальну та горизонтальну асимптоти графіка. 3) Знайдіть нуль функції: $x = -\frac{b}{a}$. 4) Оберіть кілька додаткових точок для побудови графіка. 5) Проведіть гіперболу, яка наближається до асимптот.

Ілюстративний приклад (3–4 хв)

6*. Побудуйте графік функції $y = \frac{2x-4}{x+1}$.

Розв'язання. 1) Область визначення:

усі числа, крім -1 .

2) Вертикальна асимптота: $x = -1$.

3) Горизонтальна асимптота:

$$y = 2 : 1 = 2.$$

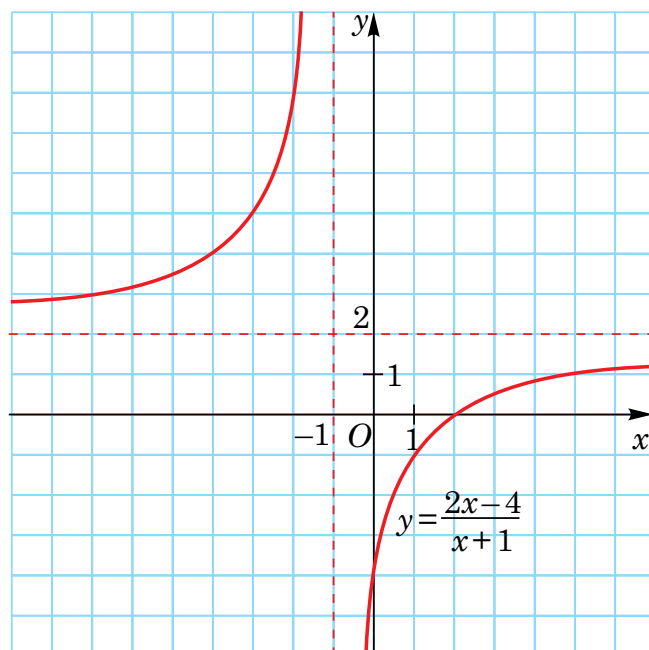
4) Нуль функції: $2x - 4 = 0, x = 2$.

5) Знайдемо додаткові точки.

$$\text{Якщо } x = 0, \text{ то } y = \frac{-4}{1} = -4.$$

$$\text{Якщо } x = 1, \text{ то } y = \frac{-2}{2} = -1.$$

Графік функції побудовано на рисунку.



V. Дробово-раціональні рівняння

Означення. Раціональним називають рівняння виду $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ — раціональні вирази. Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають **дробо-раціональним**.

Наприклад, $\frac{x+1}{5x-7} = \frac{3}{4-x}$ — дробово-раціональне рівняння.

Оскільки будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу, то будь-яке раціональне рівняння можна звести до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, де $P(x)$ та $Q(x)$ — багаточлени.

Коли дріб (дробовий вираз) дорівнює 0?

Відповідь. Дріб або дробовий вираз дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю.

Отже, рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ рівносильне системі: $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Схема розв'язування дробово-раціональних рівнянь

1. Зведіть рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.
2. Розв'яжіть рівняння $P(x) = 0$.
3. Перевірте корені рівняння на виконання умови $Q(x) \neq 0$.

Ілюстративні приклади (6–7 хв)

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 - 9}{9x + 27} = 0$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ 9x + 27 \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ x = 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$ Отже, $x = 3$.

Відповідь. 3.

8. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3} + \frac{x-8}{x} = 3$.

Розв'язання. $\frac{x}{x-3} + \frac{x-8}{x} - 3 = 0$, $\frac{x^2}{x(x-3)} + \frac{(x-3)(x-8)}{x(x-3)} - \frac{3x(x-3)}{x(x-3)} = 0$,
 $\frac{x^2 + x^2 - 8x - 3x + 24 - 3x^2 + 9x}{x(x-3)} = 0$, $\frac{-x^2 - 2x + 24}{x(x-3)} = 0$, $\frac{x^2 + 2x - 24}{x(x-3)} = 0$.

Останнє рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x(x-3) \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x = -6, \\ x = 4, \\ x \neq 3, x \neq 0. \end{cases}$

Отже, $x = -6$ та $x = 4$.

Відповідь. -6; 4.

VI. Дробово-раціональні нерівності

Для розв'язування дробово-раціональних нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$, де $P(x)$, $Q(x)$ – багаточлени, $\vee = \{<; >; \geq; \leq\}$, застосовують метод інтервалів.

Алгоритм застосування методу інтервалів до розв'язання дробово-раціональних нерівностей

1) Зводимо нерівність до стандартного вигляду: $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$, де $P(x)$, $Q(x)$ — багаточлени, а $\vee = \{<; >; \geq; \leq\}$. Переносимо всі компоненти в ліву частину нерівності та зводимо дробові вирази до спільного знаменника.

2) Знаходимо область визначення функції $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, тобто розв'язуємо нерівність $Q(x) \neq 0$.

Знаходимо нулі функції (неперервної на всій області визначення), тобто розв'язуємо рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

3) Усі знайдені числа відповідають точкам, які розбивають числову пряму на інтервали.

Корені знаменника $Q(x)$ завжди позначаються виколотими точками.

Корені чисельника $P(x)$, які не збігаються із коренями знаменника, позначаються зафарбованими точками, якщо початкова нерівність має нестрогий знак ($\geq; \leq$), або виколотими точками, якщо нерівність має строгий знак ($>; <$).

4) Визначаємо знаки функції $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ на інтервалах. Вибираємо довільне число з кожного отриманого інтервалу та підставляємо його у нерівність. Знак отриманого значення відповідає знаку дробово-раціонального виразу на цьому інтервалі.

5) Вибираємо ті інтервали, на яких виконується умова нерівності (функція $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ набуває додатних/від'ємних/недодатних/невід'ємних значень залежно від знака в нерівності).

6) Записуємо відповідь у вигляді об'єднання інтервалів.

Ілюстративний приклад (5 хв)

9. Розв'яжіть нерівність $\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$.

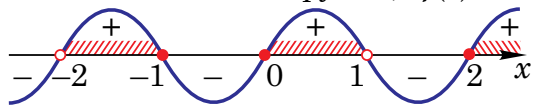
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$ та знайдемо її область визначення: $(x+2)(x-1) \neq 0$, $D(f) = R \setminus \{-2; 1\}$.

Функція неперервна на всій області визначення.

Знайдемо нулі функції $f(x)$: $\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = 0$, $\begin{cases} x(x-2)(x+1) = 0, \\ x \in R \setminus \{-2; 1\}. \end{cases}$

$x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

Тоді множина R розбивається на шість інтервалів. За допомогою пробних точок визначаємо знаки функції $f(x)$ на отриманих інтервалах:



Отже, функція $f(x) = \frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$ набуває невід'ємних значень при

$$x \in (-2; -1] \cup [0; 1) \cup [2; +\infty).$$

Відповідь. $(-2; -1] \cup [0; 1) \cup [2; +\infty)$.

VII. Інтервали знакосталості оберненої пропорційності

1. Функція виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, не визначена при $x = 0$, тому область визначення функції — множина дійсних чисел, окрім 0.

2. Значення функції визначаються знаком коефіцієнта k та знаком аргументу x .

- Якщо $k > 0$, то при $x > 0$ функція набуває додатних значень, при $x < 0$ функція набуває від'ємних значень.

Наприклад, для функції $y = \frac{3}{x}$: $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

- Якщо $k < 0$, то при $x > 0$ функція набуває від'ємних значень, при $x < 0$ функція набуває додатних значень.

Наприклад, для функції $y = -\frac{5}{x}$: $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть рівняння, коренем якого є число 2. (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x-2} = 0$	$x^2 + 4 = 0$	$5x + 12 = 2$	$\frac{3x-6}{x} = 0$	$x + 2 = x$

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{x} \leq 1$. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[5; +\infty)$	$(0; 5]$	$(-\infty; 5]$	$(-\infty; 0) \cup [5; +\infty)$

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 + 36}{x-1} > 0$. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(1; 6)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x+3}{x-1} < 0$. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$	$(-1; 3)$	$(-\infty; -3)$	$(1; +\infty)$	$(-3; 1)$

5. Розв'яжіть нерівність $x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} - 2$. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 3)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$	$(-2; 3) \cup (3; +\infty)$

6. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).
(Пробне ЗНО, 2012 р.).

Нерівність

1 $x^2 - 4 < 0$

2 $\frac{x^2 - 4}{x} < 0$

3 $1 - \frac{4}{x^2} < 0$

4 $\frac{x-2}{x} < 0$

Множина розв'язків нерівності

А $(-2; 0) \cup (0; 2)$

Б $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$

В $(-2; 2)$

Г $(-\infty; 2)$

Д $(0; 2)$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

7. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$;

2) $x - 2 = \frac{3}{x}$;

3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$;

4) $\frac{8}{x} = 6 - x$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x+1}{x-2}$;

2) $y = \frac{2x-3}{x+1}$;

3) $y = \frac{x-4}{2x+3}$;

4) $y = \frac{3x+5}{x-1}$;

5) $y = \frac{x+7}{x+2}$;

6) $y = \frac{5x-1}{2x-4}$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x-2} = 1$;

2) $\frac{2x-3}{x+1} = 2$;

3) $\frac{x-4}{x+3} = 0$;

4) $\frac{3x+1}{x-5} = -2$;

5) $\frac{x-2}{2x+1} = \frac{1}{2}$;

6) $\frac{4x-1}{x+2} = 3$;

7) $\frac{x+5}{x-3} = -1$;

8) $\frac{2x+1}{x+4} = 0$.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-3}{x+2} > 1$;

2) $\frac{2x+5}{x-4} < 2$;

3) $\frac{x+7}{2x-1} \geq -1$;

4) $\frac{3x-8}{x+6} \leq 0$;

5) $\frac{x-2}{x-5} > -1$;

6) $\frac{4x+3}{2x-7} < 3$;

7) $\frac{x+1}{x-8} \geq 2$;

8) $\frac{2x-9}{x+4} \leq -2$.

Рівень В

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-3}{x+1} = 2$; 2) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x-1} = 1$; 3) $\frac{x-4}{x+3} + \frac{2x+1}{x-5} = 0$; 4) $\frac{3x-2}{x-1} - \frac{x+5}{x+2} = 2$;

5) $\frac{x+7}{x-3} = 1 - \frac{x-2}{x+4}$; 6) $\frac{2x+3}{x-4} = \frac{x-1}{x+5} - 1$; 7) $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3x+1}{x-6} = 2$; 8) $\frac{4x-5}{x-7} - \frac{x+3}{x+2} = 1$.

2. Знайдіть інтервали знакосталості функції:

$$\begin{array}{llll} 1) y = \frac{2x+1}{x-3}; & 2) y = \frac{x-4}{2x+5}; & 3) y = \frac{3-x}{x+7}; & 4) y = \frac{5x-2}{x-1}; \\ 5) y = \frac{x+3}{3x-9}; & 6) y = \frac{2-x}{x^2-4}; & 7) y = \frac{x^2-4}{2x-3}; & 8) y = \frac{x+1}{x^2-5x+6}. \end{array}$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-5}{x+5} < x; & 2) \frac{2}{x+9} < \frac{x}{x-6}; \\ 3) \frac{1}{1-x} \geq 1-2x; & 4) \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x} \leq 1; \\ 5) \frac{1}{x^2-3x+2} \leq \frac{1}{2}; & 6) \frac{x-1}{2x-3} - \frac{x+5}{x-2} < 2; \\ 7) \frac{3}{x^2-5x+6} + \frac{x-4}{x+2} \leq 0; & 8) \frac{2x^2+1}{x+4} - \frac{3x-2}{x-1} \geq 0. \end{array}$$

4. Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x} \geq 1$. Обчисліть суму всіх цілих її розв'язків. (ЗНО, 2013 р.).

5. Знайдіть найбільше ціле число, яке задовольняє нерівність $\frac{(x+1)|x|}{x-3} \leq 0$.

(Пробне ЗНО, 2008 р.).

Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1; & 2) \frac{7x^2-4}{x+1} = 7x+1; \\ 3) \frac{x^2+3x+5}{2x-1} = \frac{8-2x-x^2}{2x-1}; & 4) \frac{3x-1}{3x+1} = 2 - \frac{x-3}{x+3}; \\ 5) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{5}{8}; & 6) \frac{3x^2-5}{x+2} = 3x+1; \\ 7) 5x-9 - \frac{8}{1-3x} = 0; & 8) \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}. \end{array}$$

2. Розв'яжіть рівняння методом заміни:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}; & 2) \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -2,5; \\ 3) \frac{13x}{3x^2-5x+2} - \frac{12x}{3x^2+x+2} = 5; & 4) 7(x+\frac{1}{x}) - 2(x^2+\frac{1}{x}) = 9; \\ 5) \frac{2x}{x^2-4x+2} + \frac{3x}{x^2+x+2} = -\frac{5}{4}; & 6) \frac{12x}{3x^2-10x+1} - \frac{1}{x} = 3x-6. \end{array}$$

3. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} + a = 0$ має тільки один корінь.

4. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$ має єдиний корінь.

5. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 4}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x + 2} > 0;$

2) $\frac{x + 3}{x - 1} - \frac{4}{x + 1} \leq 0;$

3) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} - \frac{x - 1}{x + 3} \geq 1;$

4) $\frac{x^2 - 9}{x + 2} + \frac{3x}{x^2 - 4} < 0;$

5) $\frac{2}{3x + 7} \leq \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 1};$

6) $\frac{x - 8}{x^2 - 5x + 4} > \frac{2}{x + 1};$

7) $\frac{|x + 7|}{x^2 + 8x + 7} < 5;$

8) $\left| \frac{2x + 5}{4x + 1} \right| < 1.$

6. Із пункту A в пункт B , відстань між якими дорівнює 60 км, спочатку виїхав автобус, а через 20 хв — легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса (у км/год), якщо він приїхав до пункту B на 10 хв пізніше від легкового автомобіля.

7. Бригада робітників повинна була виготовити 272 деталі. Перші десять днів бригада виконувала встановлену норму, а потім почала виготовляти щоденно на 4 деталі більше, ніж за нормою. Тому за один день до запланованого терміну було виготовлено 280 деталей. Скільки деталей мала щоденно виготовляти бригада за планом?

IX. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що я вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....