12 Тема 3. Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 5. Квадратична функція. Розв'язування квадратних рівнянь. Розв'язування квадратних нерівностей

План уроку

1. Квадратний тричлен. Виділення повного квадрата.
2. Побудова графіка квадратичної функції.
3. Властивості квадратичної функції.
4. Розв'язування квадратних рівнянь.
5. Розв'язування квадратних нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

самостійно або у співпраці з іншими обирає математичну модель розв'язання проблемної ситуації з урахуванням різних умов, зокрема бажаної точності результату та ресурсів, необхідних для застосування цієї моделі, на засадах ощадливості та поміркованості [12 МАО 3.2.2–1];

оперує математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Теорію повторюйте стисло, акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.

2) При повторенні теорії наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.

3) Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

5) Заплануйте розв'язування тренувальних вправ як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

6) Запропонуйте учням заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть нерівність $(x^2+64)(x-5)>0$. **(ЗНО, 2017 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$	$(5;8)$	$(-\infty;5)\cup(8;+\infty)$	$(-\infty;5)$

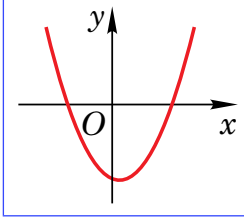
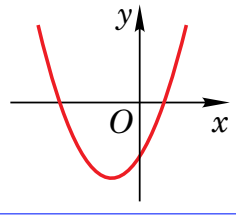
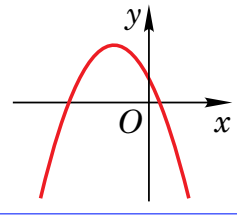
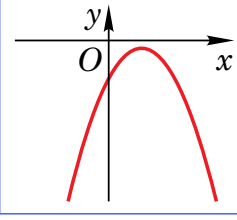
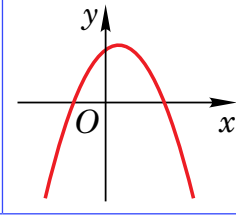
Відповідь. А.

2. Розв'яжіть рівняння $2x(x+2)=5(x+2)$. **(ЗНО, 2013 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$-2{,}5;\ 2$	-2	$2{,}5$	$-2;\ 0;\ 4$	$-2;\ 2{,}5$

Відповідь. Д.

3. На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції $y=4-(x-1)^2$? **(ЗНО, 2012 р.).**

А	Б	В	Г	Д
				

Відповідь. Д.

4. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\dfrac{3x-2}{x+1}=7$. **(ЗНО, 2017 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2]$	$(-2;0]$	$(0;2]$	$(2;4]$	$[4;+\infty)$

Відповідь. А.

III. Квадратний тричлен. Виділення повного квадрата

Нагадаємо декілька означень.

1) Квадратним тричленом називається вираз ax^2+bx+c, де a, b, c — деякі числа, причому $a\neq 0$.

2) Деяке число називається коренем квадратного тричлена ax^2+bx+c, якщо це число є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$.

3) Дискримінантом D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називається вираз $b^2 - 4ac$.

Алгоритм розкладання квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ на лінійні множники

1. Знайдіть корені квадратного тричлена.

2. Якщо рівняння має корені x_1 та x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ при $x_1 \neq x_2$.

3. Якщо рівняння має корені x_1 та x_2 такі, що $x_1 = x_2$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

4. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його неможливо розкласти на лінійні множники.

Розглянемо випадок, коли дискримінант квадратного тричлена від'ємний, тобто $D < 0$.

Виділимо повний квадрат:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right) = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4abc) =$$

$$= \frac{1}{4a}\left((2ax + b)^2 - D\right).$$

Якщо $D < 0$, то $(2ax + b)^2 - D > 0$.

Тоді:

1) при $a > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$;

2) при $a < 0$, $ax^2 + bx + c < 0$.

Таким чином, маємо теорему.

Теорема. **Якщо квадратний тричлен не має коренів, то при будь-яких значеннях змінної він збігається за знаком зі своїм старшим коефіцієнтом.**

Ілюстративний приклад (3–4 хв)

5. Скоротіть дробовий вираз $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{1 - 3x^2 - 2x}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник дробу — для цього розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$, $D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25$,

$x_1 = \dfrac{7 + 5}{6} = 2$, $x_2 = \dfrac{7 - 5}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Таким чином, $3x^2 - 7x + 2 = 3(x - 2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x - 1)$.

Розкладемо на множники знаменник дробу — для цього розв'яжемо рівняння $-3x^2 - 2x + 1 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 4 + 12 = 16$,

$x_1 = \dfrac{2 + 4}{-6} = -1$, $x_2 = \dfrac{2 - 4}{-6} = \dfrac{1}{3}$.

Таким чином, $-3x^2 - 2x + 1 = -3(x + 1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = -(x + 1)(3x - 1)$.

Отже, $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{1 - 3x^2 - 2x} = \dfrac{(x - 2)(3x - 1)}{-(x + 1)(3x - 1)} = -\dfrac{x - 2}{x + 1} = \dfrac{2 - x}{x + 1}$.

Відповідь. $\dfrac{2 - x}{x + 1}$.

IV. Побудова графіка квадратичної функції

Означення. Функцію $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — довільні числа, причому $a \neq 0$, називають ***квадратичною***.

Графік квадратичної функції називають ***параболою***.

Як відомо, графіком функції $y = ax^2$ є парабола з вершиною в початку координат і вітками, напрямленими вгору, якщо $a > 0$, або напрямленими вниз, при $a < 0$.

Теорема. **Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, яку можна отримати з параболи $y = ax^2$ паралельним перенесенням.**

Доведення. $y = ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right) =$

$= \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4abc) = \frac{1}{4a}\left((2ax + b)^2 - D\right) =$

$= \frac{1}{4a}(2a)^2\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$

Щоб побудувати графік такої функції, потрібно виконати паралельне перенесення параболи $y = ax^2$ так, щоб її вершина збігалася з точкою $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, що й треба було довести.

Пряма $x = -\frac{b}{2a}$ є віссю симетрії параболи $y = ax^2 + bx + c$.

Практичні поради. Запам'ятати потрібно лише формулу для знаходження абсциси вершини параболи $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Формула для знаходження ординати параболи $y = -\frac{D}{4a}$ важлива, проте, коли відома абсциса точки, то ординату можна знайти, якщо підставити значення абсциси в рівняння, яке задає функцію.

Алгоритм побудови графіка функції $y = ax^2 + bx + c$

1. Знайдіть координати вершини параболи та побудуйте на координатній площині відповідну точку, проведіть вісь симетрії параболи.
2. Знайдіть координати точки перетину параболи з віссю ординат. Підставте $x = 0$ у формулу функції. Позначте цю точку, а також точку, симетричну їй відносно осі симетрії параболи.
3. Знайдіть координати точок перетину параболи з віссю абсцис. Для цього підставте у формулу $y = 0$ і розв'яжіть рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Якщо ви отримали раціональні координати, то позначте ці точки на координатній площині; якщо координати —ірраціональні, то спробуйте підібрати, якщо можливо, ще декілька точок із раціональними координатами.
4. Через отримані три (або більше) точки, з урахуванням форми графіка, будуємо шукану параболу.

Ілюстративні приклади (6–8 хв)

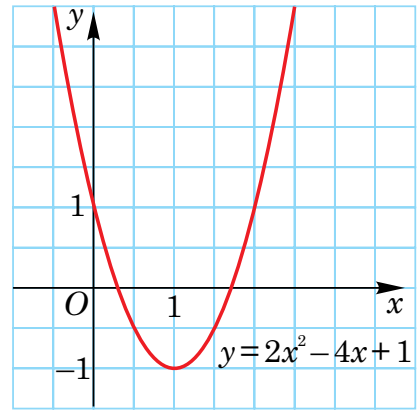
6. Побудуйте графік квадратичної функції $y = 2x^2 - 4x + 1$ методом виділення повного квадрата.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат:
$y = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 = 2((x-1)^2 - 1) + 1 = 2(x-1)^2 - 1$.
Отже, вершина параболи: (1; –1).
Парабола спрямована вітками вгору ($a = 2 > 0$) і має вісь симетрії $x = 1$.
Нулі функції: $2x^2 - 4x + 1 = 0$,

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}29,$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}71.$$

Перетин з віссю Oy визначає вільний член квадратного тричлена, тобто точка (0; 1).
Графік побудовано на рисунку.



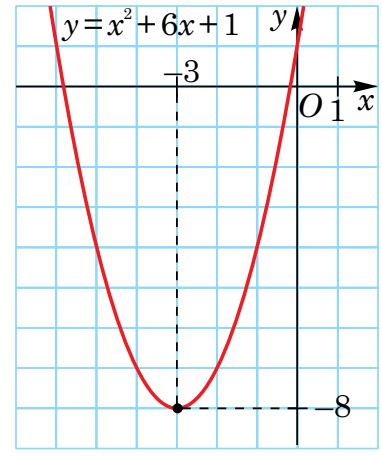
7. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 6x + 1$ за алгоритмом побудови графіка квадратичної функції.

Розв'язання. 1) Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 + 6x + 1$.
Оскільки $a = 1$, $b = 6$, $c = 1$, то:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3,$$

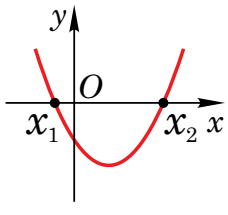
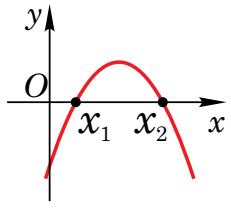
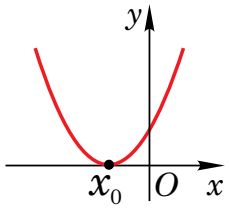
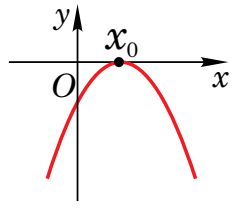
$$y_0 = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 1 = -8.$$

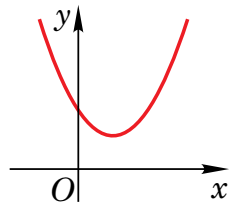
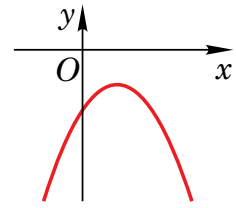
Позначаємо на координатній площині точку з координатами (–3; –8) та проводимо вісь симетрії параболи — пряму $x = -3$.
2) Знайдемо координати точки перетину параболи з віссю ординат, при $x = 0$:
$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1$.
Позначимо точку з координатами (0; 1) та симетричну їй точку, відносно прямої $x = -3$, з координатами (–6; 1).
3) Точки перетину шуканої параболи з віссю абсцис мають ірраціональні значення абсцис, тому можна підібрати ще точки з координатами (–1; –4), (–5; –4), (–2; –7), (–4; –7) тощо.
4) Через отримані точки, з урахуванням форми графіка, будуємо шукану параболу.



V. Властивості квадратичної функції (6–8 хв)

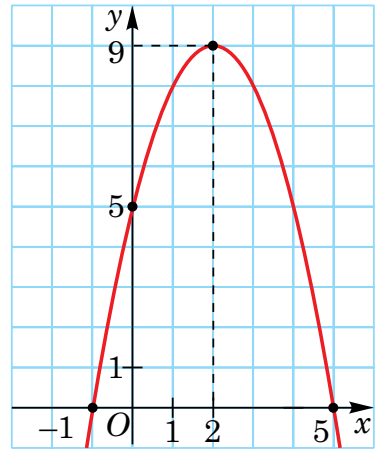
Властивості квадратичної функції наведено в таблиці

Функція $y = ax^2 + bx + c$		**$a > 0$**	**$a < 0$**
Напрямок віток параболи		Вгору	Донизу
Область визначення		$x \in (-\infty; +\infty)$	
Область значень		$y \in [y_0; +\infty)$	$y \in (-\infty; y_0]$
Вісь симетрії		Пряма $x = -\dfrac{b}{2a}$, при цьому $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсциса вершини параболи.	
Точка перетину з віссю ординат		$(0; c)$.	
Точки перетину з віссю абсцис	**$D > 0$**	$(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, (x_1 та x_2 — нулі функції). Корисно знати, що $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, тобто нулі квадратичної функції симетричні відносно прямої $x = -\dfrac{b}{2a}$.	
	$D = 0$	$(x_0; 0)$. Вершина параболи лежить на осі абсцис.	
	$D < 0$	Точок перетину з віссю абсцис немає.	
Проміжки зростання та спадання		Спадає: $x \in (-\infty; x_0]$. Зростає: $x \in [x_0; +\infty)$.	Спадає: $x \in [x_0; +\infty)$. Зростає: $x \in (-\infty; x_0]$.
Проміжки знакосталості (сталого знака)	**$D > 0$**	Якщо $y > 0$, то: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. Якщо $y < 0$, то: $x \in (x_1; x_2)$. 	Якщо $y > 0$, то: $x \in (x_1; x_2)$. Якщо $y < 0$, то: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. 
	$D = 0$	Якщо $y > 0$, то $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$. Якщо $y < 0$, то таких значень x немає. 	Якщо $y > 0$, то таких значень x немає. Якщо $y < 0$, то $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$. 

Функція $y = ax^2 + bx + c$		$a > 0$	$a < 0$
Проміжки знакосталості (сталого знака)	$D < 0$	Якщо $y > 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо $y < 0$, то таких значень x немає. 	Якщо $y > 0$, то таких значень x немає. Якщо $y < 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$. 

Ілюстративні приклади (6–8 хв)

8. За графіком квадратичної функції (див. рисунок) заповніть таблицю.

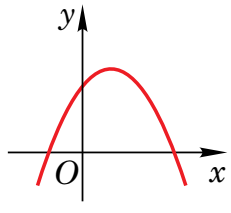


Розв'язання.

Властивість функції або координати точок, або певні рівняння	Розв'язання
Область визначення та область значень функції.	Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значень: $y \in (-\infty; 9]$.
Координати вершини параболи.	(2; 9)
Проміжок, на якому функція спадає.	$x \in [2; +\infty)$
Проміжок, на якому функція зростає.	$x \in (-\infty; 2]$
Точка перетину графіка з віссю ординат.	(0; 5)
Нулі функції.	–1 та 5
Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень.	$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$
Проміжки, на яких функція набуває додатних значень.	(–1; 5)
Рівняння прямої, яка є віссю симетрії параболи.	$x = 2$

Властивість функції або координати точок, або певні рівняння	Розв'язання
Функція, графіком якої є дана парабола.	Нехай функція має вигляд $y = ax^2 + bx + c$. Оскільки точкою перетину графіка функції з віссю ординат є точка (0; 5), то $c = 5$. Графік функції також проходить через точки (–1; 0) та (5; 0), тому правильні рівності: $a - b + 5 = 0$ та $25a + 5b + 5 = 0$. Маємо систему: $\begin{cases} a - b + 5 = 0, \\ 25a + 5b + 5 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + 5 = 0, \\ 5a + b + 1 = 0. \end{cases}$ Додавши рівняння системи отримаємо: $6a + 6 = 0$, тобто $a = -1$. Підставивши $a = -1$ в перше рівняння, отримаємо $b = 4$. Отже, функція має вигляд $y = -x^2 + 4x + 5$.

9. За графіком функції $y = ax^2 + bx + c$, який зображений на рисунку, визначте знаки чисел a, b, c і дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.



Розв'язання.

1) Вітки параболи напрямлені донизу, тому $a < 0$.

2) Парабола перетинає вісь Oy в точці з додатною ординатою, тому $c > 0$.

3) Координата вершина параболи має додатну абсцису, тому $x_0 > 0$, звідки $-\dfrac{b}{2a} > 0$.

Оскільки $a < 0$, то $-2a > 0$, тому, помноживши обидві частини нерівності $-\dfrac{b}{2a} > 0$ на $-2a$, отримаємо, що $b > 0$.

4) Як видно з рисунка, функція має два нулі, тому $D > 0$.

Відповідь. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D > 0$.

VI. Розв'язування квадратних рівнянь. Теорема Вієта

Означення. Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називається ***квадратним***. Число a — старший коефіцієнт, число b — другий коефіцієнт, число c — вільний член.

- Якщо старший коефіцієнт дорівнює 1, то рівняння називають *зведеним*.
- Якщо другий коефіцієнт або вільний член дорівнює 0, то рівняння називають *неповним квадратним рівнянням*.

Алгоритм та приклади розв'язування неповних квадратних рівнянь

Коефіцієнт або вільний член	Рівняння	Розв'язання	Приклад
$c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x(ax + b) = 0$, $x = 0$ або $ax + b = 0$, $x = 0,\ x = -\frac{b}{a}$.	$3x^2 + 8x = 0$, $x(3x + 8) = 0$, $x = 0$ або $3x + 8 = 0$, $x = 0,\ x = -\frac{8}{3}$.
$b = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$. 1) Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння коренів не має. 2) Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.	1) $3x^2 + 8 = 0$, $x^2 = -\frac{8}{3}$. Рівняння коренів не має. 2) $3x^2 - 8 = 0$, $x^2 = \frac{8}{3}$, $x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$.
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$	$3x^2 = 0$, $x = 0$

Алгоритм розв'язування квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо $b \neq 0$ і $c \neq 0$

1. Знаходимо дискримінант $D = b^2 - 4ac$.

2. Якщо $D > 0$, то: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

3. Якщо $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має.

Означення. Зведеним квадратним рівнянням називається рівняння виду $x^2 + px + q = 0$, у якому старший коефіцієнт дорівнює 1, p — другий коефіцієнт, q — вільний член.

Для будь-якого квадратного рівняння можна записати рівносильне йому зведене квадратне рівняння, якщо поділити обидві його частини на старший коефіцієнт.

Наприклад, для рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$ отримаємо $x^2 - \frac{2}{3} \cdot x - \frac{5}{3} = 0$.

Теорема Вієта. **Якщо x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ та $x_1 \cdot x_2 = q$.**

Доведення. Знайдемо дискримінант: $D = p^2 - 4q$.

$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-p - \sqrt{D}\right)\left(-p + \sqrt{D}\right)}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Наслідок. **Якщо квадратне рівняння не є зведеним, тобто $ax^2 + bx + c = 0$ з коренями x_1 та x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.**

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

10. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 2x - 16 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$, то
$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196$.

Отже, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + \sqrt{196}}{6} = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Відповідь. $-2;\ 2\frac{2}{3}$.

11. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $2x^2 + 5x - 2 = 0$.

Розв'язання. Щоб переконатися в наявності коренів рівняння $2x^2 + 5x - 2 = 0$, знайдемо дискримінант: $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 + 16 = 41 > 0$.
Отже, корені існують.

Запишемо зведене квадратне рівняння, яке рівносильне даному: $x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Відповідь. $-\frac{5}{2}; -1$.

VII. Розв'язування квадратних нерівностей

Нехай $\vee = \{<, >, \leq, \geq\}$.

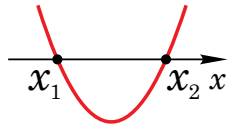
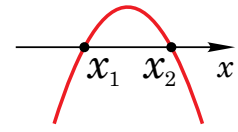
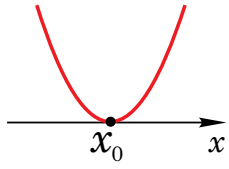
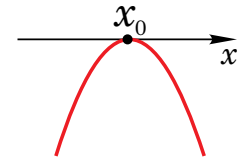
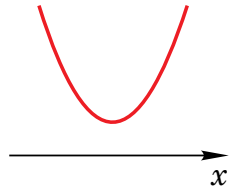
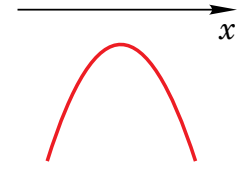
Означення. Нерівності виду $ax^2 + bx + c \vee 0$ називають ***квадратними***.

Основним методом розв'язування квадратних нерівностей є графічний метод.

За схематичним зображенням параболи, яка є графіком квадратичної функції $y(x) = ax^2 + bx + c$, визначають проміжки знакосталості цієї функції.

Розташування параболи відносно осі абсцис

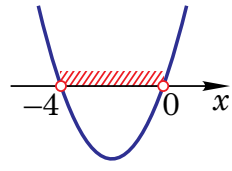
У таблиці наведено схематичне розташування параболи відносно осі абсцис залежно від значень коефіцієнта a та дискримінанта D відповідного квадратного тричлена.

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

12. Розв'яжіть нерівність $3x^2 + 12x < 0$.

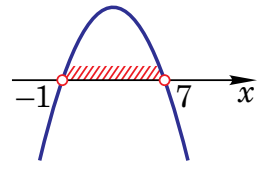
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 3x^2 + 12x$. Коефіцієнти: $a = 3$; $b = 12$; $c = 0$.
Знайдемо нулі функції $f(x)$: $3x^2 + 12x = 0$; $3x(x + 4) = 0$;
$x = 0$ або $x + 4 = 0$;
$x = -4$.
Позначимо отримані точки на координатній прямій та зобразимо схематично параболу:
Отже, $x \in (-4; 0)$.



Відповідь. (–4; 0).

13. Розв'яжіть нерівність $(3x + 1)(x + 3) > (2x + 1)^2 - 5$.

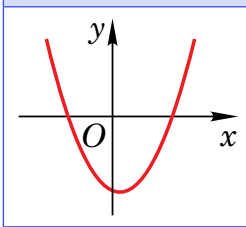
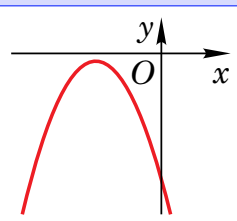
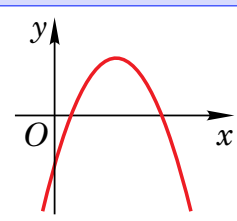
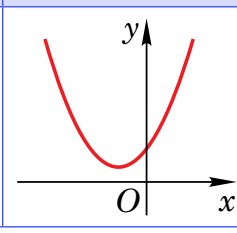
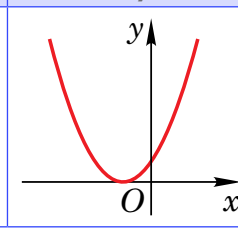
Розв'язання. Розкриємо дужки та перенесемо усі компоненти нерівності в ліву частину: $(3x + 1)(x + 3) > (2x + 1)^2 - 5$, $3x^2 + 10x + 3 > 4x^2 + 4x + 1 - 5$,
$-x^2 + 6x + 7 > 0$.
Розглянемо функцію $f(x) = -x^2 + 6x + 7$. Коефіцієнти: $a = -1$; $b = 6$; $c = 7$.
Знайдемо нулі функції $f(x)$: $-x^2 + 6x + 7 = 0$, $x^2 - 6x - 7 = 0$.
За теоремою, оберненою до теореми Вієта, знаходимо: $x = -1$ або $x = 7$.
Позначимо отримані точки на координатній прямій та зобразимо схематично параболу:
Отже, $x \in (-1; 7)$.
Відповідь. (–1; 7).



VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень А

1. Яка з наведених парабол може бути графіком функції $y = x^2 + px + q$, якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має дійсних коренів. **(ЗНО, 2016 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
				

2. Розв'яжіть нерівність $a^2 > a$. **(ЗНО, 2006 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

3. Розв'яжіть нерівність $(x+4)(x-7) > 3(x-7)$. **(ЗНО, 2012 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$	$(-1; 7)$	$(-1; 7) \cup (7; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(7; +\infty)$

4. Розв'яжіть нерівність $2x \geq x^2$. **(ЗНО, 2013 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[0; 2]$	$(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 2]$

5. Розв'яжіть нерівність $(x+4)^2 \leq 16$. **(ЗНО, 2014 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
$[-8; 0]$	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 4]$	$[-8; 8]$	$(-\infty; 8]$

6. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2+36}{x-1} > 0$. **(ЗНО, 2008 р.)**.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(1; 6)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$

7. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

1) $x^2 + 6x + 9$;
2) $x^2 - 8x + 16$;
3) $x^2 + 10x + 25$;
4) $x^2 - 4x + 4$;
5) $9x^2 - 30x + 25$;
6) $16x^2 - 24x + 9$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
2) $2x^2 - x - 6 = 0$;
3) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
4) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
5) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
6) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
7) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
8) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
10) $-2x^2 + x + 15 = 0$.

9. Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см², а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

10. Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

11. Сума квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа.

12. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2+6x-7<0$;
2) $x^2-2x-48\ge 0$;
3) $-x^2-6x-5>0$;
4) $-x^2+4x-3<0$;
5) $3x^2-7x+4\le 0$;
6) $2x^2+3x+1>0$;
7) $4x^2-12x\le 0$;
8) $4x^2-9>0$;
9) $x^2-12x+36>0$;
10) $4x^2-12x+9\ge 0$;
11) $x^2+4x+4<0$;
12) $49x^2-14x+1\le 0$.

Рівень В

1. Для функції $y=x^2+4x+3$ серед тверджень 1) – 3) оберіть правильні твердження.

1) Графік функції проходить через точку (0; –3).
2) Абсциса вершини параболи дорівнює 2.
3) Ордината вершини параболи дорівнює –1.

А	Б	В	Г	Д
лише 1)	лише 2)	лише 3)	2) і 3)	1), 2) і 3)

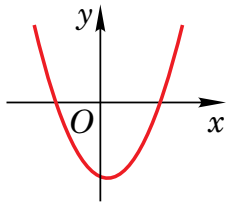
2. Укажіть інтервал зростання функції $y=-x^2-5x-4$.

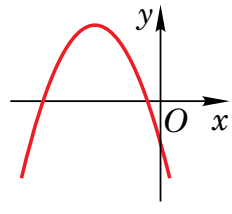
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5]$	$(-\infty; -2{,}5]$	$[2{,}5; +\infty)$	$(-\infty; -2{,}25]$	$[-2{,}5; +\infty)$

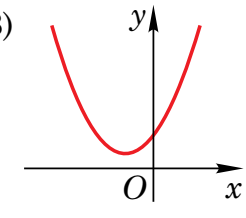
3. Обчисліть значення виразу $\dfrac{x_1\cdot x_2}{(x_1+x_2)^2}$, якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x-\left(2+\sqrt{3}\right)=0$. **(ЗНО, 2008 р.).**

А	Б	В	Г	Д
–0,5	–1	1,5	2	3

4. Установіть відповідність між схематичними графіками (1–3) квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ та знаками чисел b і c (А–Д).

1)


2)


3)


А	Б	В	Г	Д
$b>0$, $c<0$	$b>0$, $c>0$	$b<0$, $c<0$	$b<0$, $c>0$	$b<0$, $c=0$

5. Побудуйте графік квадратичної функції:

1) $y = 2x^2 + 8x + 3$;
2) $y = -x^2 + 2x + 8$;
3) $y = 3x^2 - 12x + 7$;
4) $y = -2x^2 - 4x + 1$;
5) $y = x^2 + 10x + 16$;
6) $y = -x^2 + 6x - 5$;
7) $y = 4x^2 - 8x + 12$;
8) $y = -3x^2 + 12x - 7$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$;
7) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
8) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
9) $3(x + 1)^2 = 2x + 2$;
10) $(x + 3)(x - 1) = 2x(x - 2) + 5$.

7. Від прямокутного аркуша паперу завдовжки 18 см відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині аркуша. Площа решти аркуша становить 72 см^2. Якою була ширина аркуша паперу?

8. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один із них на 14 см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 34 см.

9. Знайдіть сторони прямокутника, якщо їхня різниця дорівнює 31 см, а діагональ прямокутника дорівнює 41 см.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \le x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \le 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $2(x^2 + 2) \ge x(x + 5)$;
6) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
7) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
8) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

Рівень С

1. Дослідіть квадратичну функцію та побудуйте графік функції:

1) $y = 2x^2 - 8x + 7$;
2) $y = -x^2 + 6x - 5$;
3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$;
4) $y = 3x^2 + 12x + 11$;
5) $y = -2x^2 - 8x - 6$;
6) $y = x^2 - 10x + 21$;
7) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$;
8) $y = 5x^2 - 20x + 19$.

2. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

3. При яких значеннях параметра b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$;
4) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

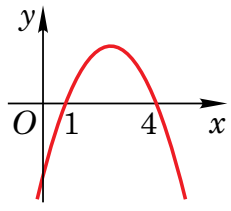
4. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} + a = 0$ має тільки один корінь.

5. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\dfrac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$ має єдиний корінь.

6. Розв'яжіть нерівність $(x^2-x-1)(x^2-x-7)\le -5$. У відповідь запишіть добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

7. Розв'яжіть нерівність $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\le 0$. У відповідь запишіть кількість додатних цілих розв'язків.

8. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y=f(x)$, який перетинає вісь Ox в точках (1; 0) і (4; 0). Знайдіть множину всіх розв'язків нерівності $x\cdot f(x)<0$. **(Пробне ЗНО, 2013 р.).**



IX. Рефлексія (1–2 хв)

Як я почуваюсь на уроці?

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Жахливо Чудово

Поради собі для наступного уроку . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .