

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 6. Тригонометричні функції. Тригонометричні рівняння

План уроку

1. Тригонометричні функції та їхні графіки.
2. Властивості тригонометричних функцій.
3. Дослідження тригонометричних функцій.
4. Розв'язування тригонометричних рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

оперує математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1];

за потреби, виправляє помилки і вносить зміни в математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 МАО 3.2.3–1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3–1];

доцільно та правильно використовує математичну термінологію і символіку [12 МАО 4.3.1–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теорію повторюйте стисло, акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.
- 2) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 3) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

4) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

5) Заплануйте розв'язування тренувальних вправ як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

6) Запропонуйте учнівству заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть головний період функції $y = \cos 2\pi x$.

Відповідь. 1.

2. Укажіть градусні міри кутів α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) таких, для яких $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

Відповідь. 0° і 180° .

3. Функція $y = f(x)$ є парною. Знайдіть $f(-5)$, якщо $f(5) = -8$.

Відповідь. -8 .

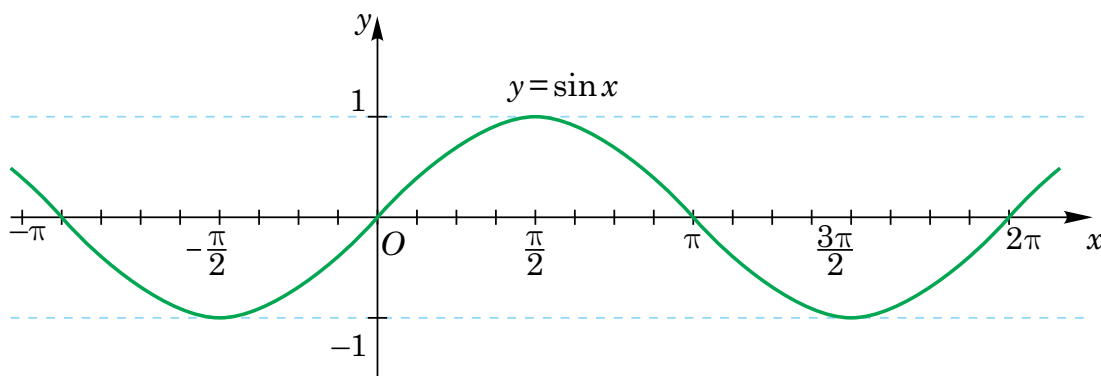
4. Функція $y = f(x)$ є непарною. Знайдіть $f(-5)$, якщо $f(5) = -8$.

Відповідь. 8.

III. Тригонометричні функції (12–15 хв)

1. Функція синус. Графік функції та її властивості

Графік функції $y = \sin x$ називається *синусоїдою*.



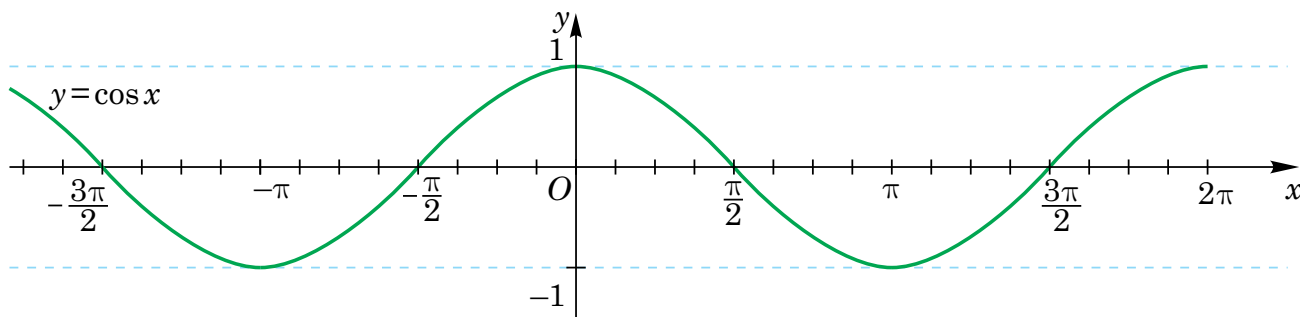
Властивості функції $y = \sin x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, тобто: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Область значень	$E(y) = [-1; 1]$.

Найбільше значення функції	Найбільше значення функції $y = \sin x$ дорівнює 1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції $y = \sin x$ дорівнює -1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом 2π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функції	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$. $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

2. Функція косинус. Графік функції та її властивості

Графік функції $y = \cos x$ називається *косинусоїдою*.



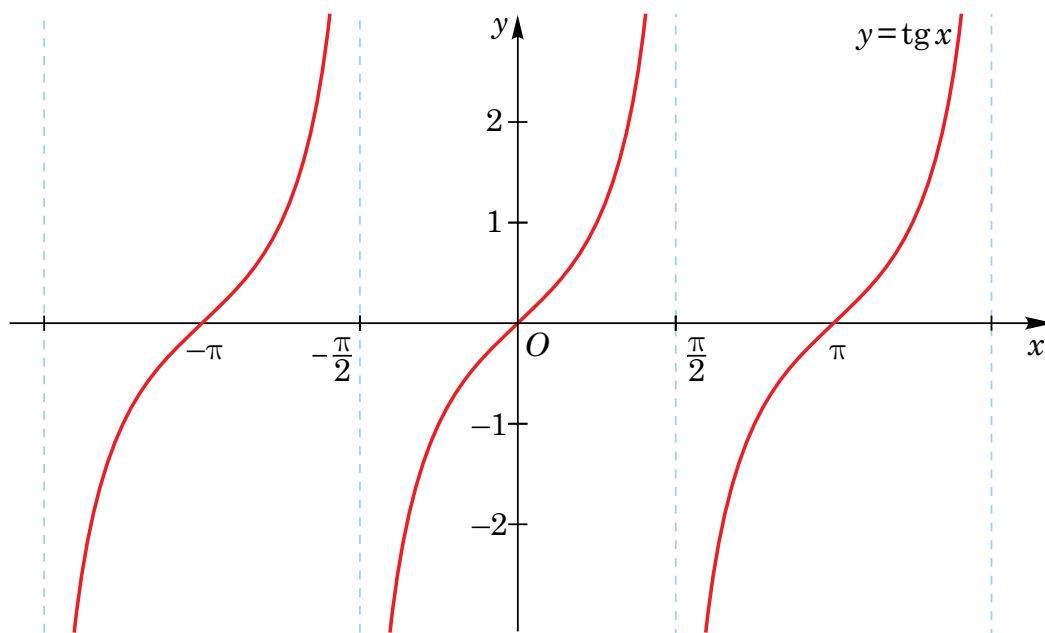
Властивості функції $y = \cos x$

Область визначення	Множина усіх дійсних чисел, тобто: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Область значень	$E(y) = [-1; 1]$.
Найбільше значення функції	Найбільше значення функції $y = \cos x$ дорівнює 1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції $y = \cos x$ дорівнює -1 і досягається воно в точках, що відповідають кутам виду $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
Парність та непарність функції	Функція парна. Графік функції симетричний відносно осі ординат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом 2π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$ Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$
Проміжки знакосталості функції	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$ $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

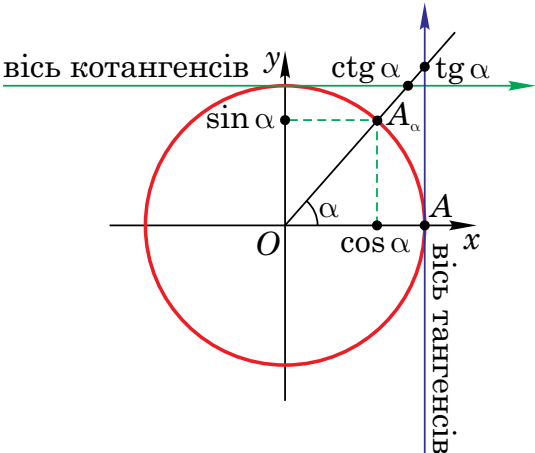
3. Функція тангенс. Графік функції та її властивості

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називається *тангенсоїдою*.



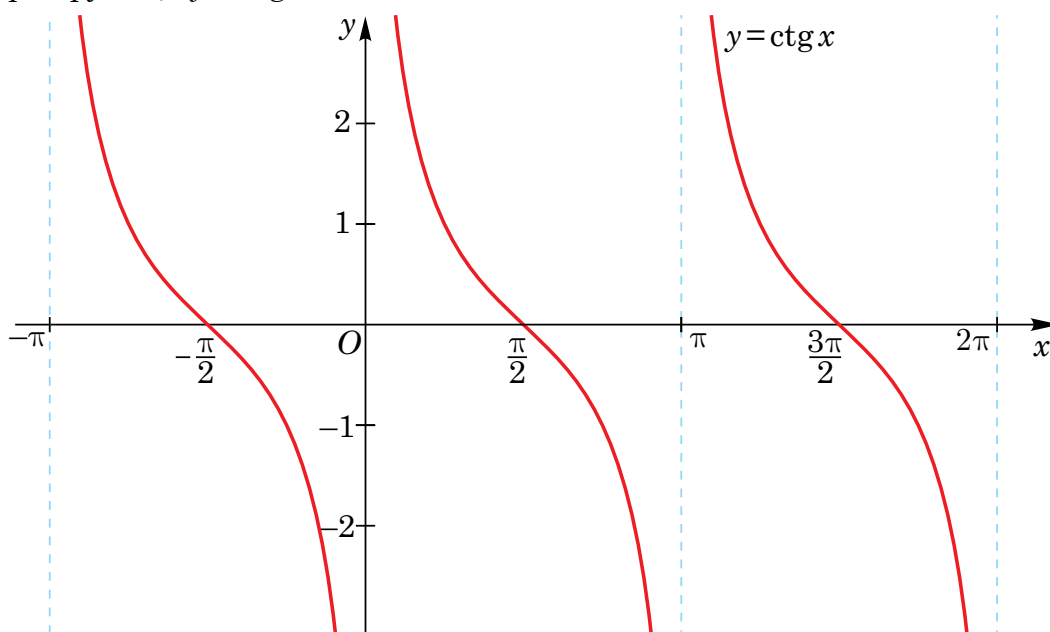
Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ Прямі, що задаються рівняннями $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty).$

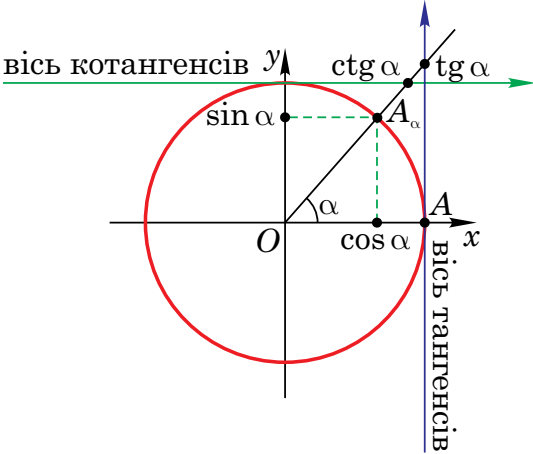
Найбільше значення функції	Тангенс може бути будь-яким дійсним числом, тому що це ордината точки перетину прямих $y = kx$ та $x = 1$.
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом π .
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функції	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

4. Функція котангенс. Графік функції та її властивості

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ називається *котангенсоїдою*.



Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Прямі, що задаються рівнянням $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називають <i>асимптотами</i> .
Область значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Найбільше значення функції	Котангенс може бути будь-яким дійсним числом, тому що це абсциса точки перетину прямих $y = kx$ та $y = 1$.
Найменше значення функції	
Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність та непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом π .
Проміжки монотонності функції	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функції	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

За властивістю, якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

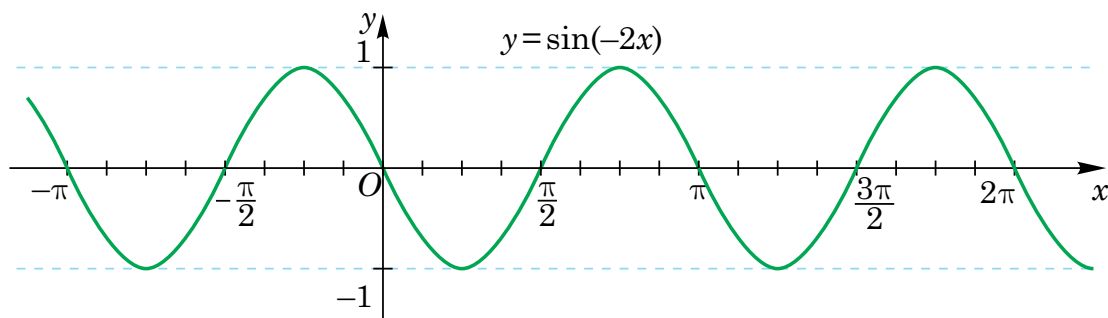
Ілюстративні приклади (6–7 хв)

- 5.** Знайдіть період функції $y = \cos\left(4 - \frac{3\pi x}{4}\right)$.

Розв'язання. Головним періодом функції $y = \cos x$ є число 2π , тому головним періодом функції $y = \cos\left(4 - \frac{3\pi x}{4}\right)$ буде число $2\pi : \left|-\frac{3\pi}{4}\right| = \frac{8}{3}$.

Відповідь. $\frac{8}{3}$.

6. За графіком функції $y = \sin(-2x)$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

2) Множиною значень є проміжок $[-1; 1]$.

3) Функція непарна.

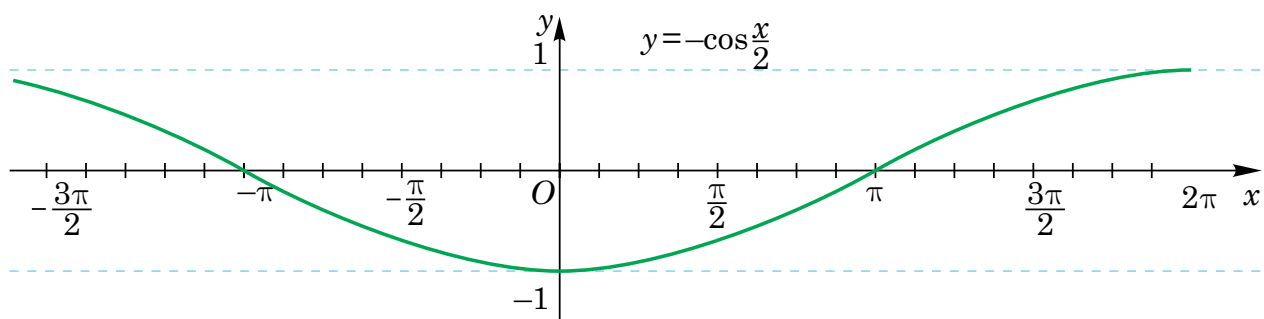
4) Функція періодична з головним періодом π .

5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$, і від'ємна на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, і спадає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

7. За графіком функції $y = -\cos \frac{x}{2}$ (див. рисунок) дослідіть її властивості.



Розв'язання. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

2) Множиною значень є проміжок $[-1; 1]$.

3) Функція парна.

4) Функція періодична з головним періодом 4π .

5) Нулі функції — числа виду $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $(\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n), n \in \mathbb{Z}$, і від'ємна на кожному з проміжків виду $(-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $[4\pi n; 2\pi + 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$, і спадає на кожному з проміжків виду $[-2\pi + 4\pi n; 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

IV. Розв'язування тригонометричних рівнянь (12–14 хв)

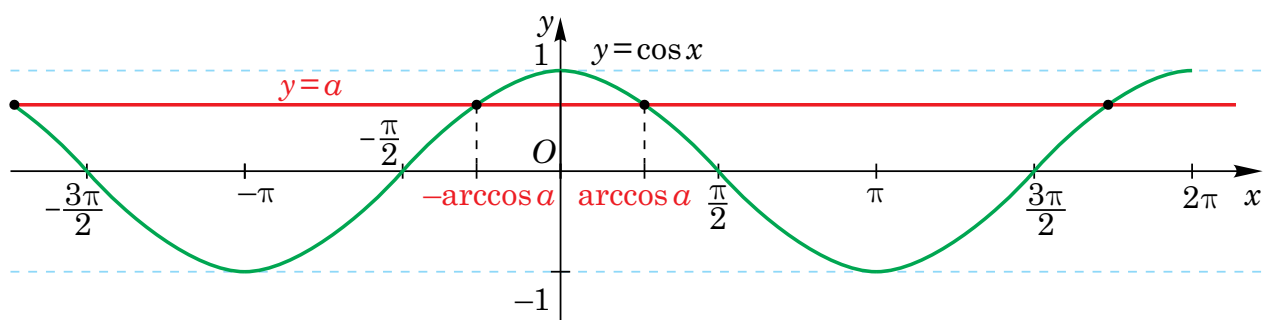
Означення. Тригонометричними рівняннями називають рівності, в яких змінна міститься *лише* під знаком тригонометричної функції.

Найпростішими тригонометричними рівняннями вважають рівняння виду: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де a — довільне дійсне число.

1. Загальна формула коренів рівняння $\cos x = a$

Формулу коренів рівняння $\cos x = a$, $-1 \leq a \leq 1$, можна записати так:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Особливі випадки

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Оскільки особливі випадки зустрічаються досить часто, то варто запам'ятати розв'язки кожного з них.

2. Загальна формула коренів рівняння $\sin x = a$

У загальному, розв'язками рівняння $\sin x = a$, де $-1 \leq a \leq 1$, є дві множини:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ та } x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

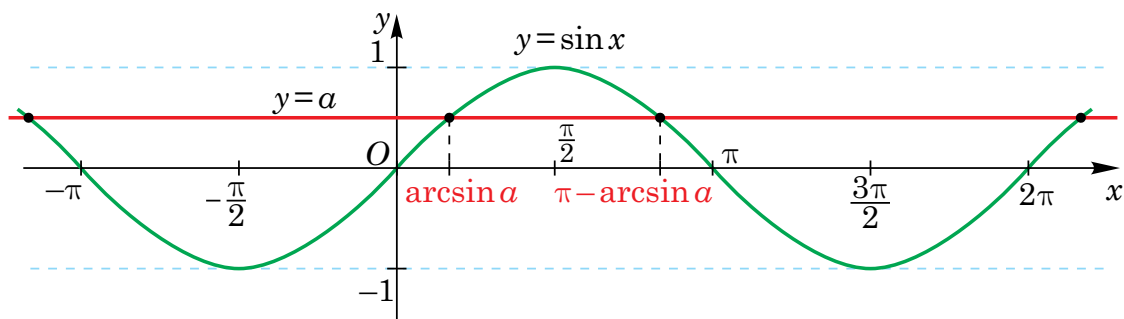
Множини коренів можна записати так:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ та } x = -\arcsin a + (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Тобто, якщо біля числа π множником є парне ціле число, то арксинус беремо зі знаком «+», а коли непарне, то арксинус беремо зі знаком «-».

Отже, загальна формула коренів рівняння має вигляд:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Особливі випадки

$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Оскільки особливі випадки зустрічаються досить часто, то варто запам'ятати розв'язки кожного з них.

3. Формули коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$

Множину коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$ записують у вигляді: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Множину коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ записують у вигляді: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

- 8.** Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. $\cos x = \frac{1}{3}, x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

- 9.** Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = -1$.

Розв'язання. $\sin 3x = -1, 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

- 10.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} 2x = 1, 2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

- 11.** Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 1, n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{3} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

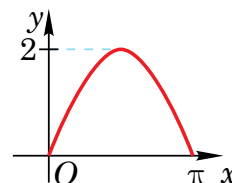
V. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть множину значень функції $y = 2\cos x + 3$.

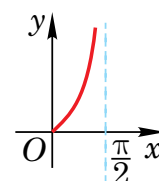
А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[-5; 5]$	$[1; 5]$	$[3; 5]$	$(-\infty; +\infty)$

2. На рисунку зображено фрагмент графіка однієї з наведених функцій на проміжку $[0; \pi]$. Укажіть цю функцію.



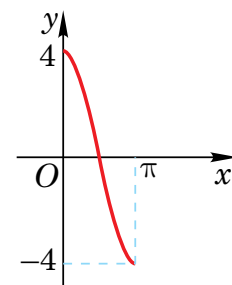
А	Б	В	Г	Д
$y = 2\sin x$	$y = \sin 2x$	$y = 2\cos x$	$y = \cos 2x$	$y = -2\sin x$

3. На рисунку зображено фрагмент графіка однієї з наведених функцій на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Укажіть цю функцію.



А	Б	В	Г	Д
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = 2^x$	$y = x^2$	$y = \frac{\pi}{2}x$	$y = \operatorname{tg} x$

4. На рисунку зображено фрагмент графіка однієї з наведених функцій на проміжку $[0; \pi]$. Укажіть цю функцію.



А	Б	В	Г	Д
$y = 4\sin x$	$y = \sin 4x$	$y = -4\sin x$	$y = -4\cos x$	$y = 4\cos x$

5. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\operatorname{tg} x = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

6. Укажіть кількість коренів рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ на відрізку $[0; 3\pi]$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

7. Укажіть корінь рівняння $\operatorname{tg}(3x) = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$

8. Укажіть корінь рівняння $\sin(4x) = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

9. Розв'яжіть рівняння $2\sin x = 1$. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

10. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	інша відповідь

11. Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

12. Розв'яжіть рівняння $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$(-1)^k \pi + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\pm\pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$(-1)^k \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\pm\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Рівень В

1. Знайдіть множину значень функції $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$. (ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
$[1; 2]$	$[0; 2]$	$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$	$[0; 1]$	інша відповідь

2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$. (ЗНО, 2014 р.)

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{9} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

3. Задано рівняння:

1) $\log_2 x - \log_2(x-2) = 1$, 2) $\cos x = 1 - \sqrt{3}$, 3) $|x+2| = -3$, 4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi$.

Укажіть рівняння, яке не має коренів на множині дійсних чисел. (ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
1) і 4)	2) і 3)	1) і 2)	3) і 4)	інша відповідь

4. Установіть відповідність між функцією (1–3) та головним періодом (А–Д) функції.

Функція	Головний період функції	А Б В Г Д
1 $y = \sin 2x$	А 2π	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $y = \cos x$	Б π	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$	В 3π	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г $\frac{\pi}{2}$	
	Д $\frac{\pi}{3}$	

5. Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та твердженням (А–Д), що є правильним для цього рівняння. (ЗНО, 2012 р.).

Рівняння	Твердження	А Б В Г Д
1 $x + \pi = 0$	А коренем рівняння є ірраціональне число	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $\cos x = \sqrt{3}$	Б коренем рівняння є число 16	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $\sqrt{x} = 4$	В рівняння не має коренів	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4 $\frac{x-1}{x+7} = 0$	Г рівняння має два корені	4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Д корінь рівняння належить відрізку $[-2; 2]$	

6. Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та кількістю його коренів (А–Д) на проміжку $[-5; 5]$. (ЗНО, 2012 р.).

Рівняння	Кількість коренів рівняння на проміжку	А Б В Г Д
1 $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$	А жодного	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $\log_3 x = -2$	Б один	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 8} = 0$	В два	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4 $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	Г три	4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Д чотири	

- 7.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною розв’язків (А–Д) рівняння.

Рівняння

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a, |a| \leq 1$

2 $\sin x \cos x = \frac{a}{2}$

3 $\sin x = a \cos x$

4 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$

Множина розв’язків рівняння

А $\pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$

Б $\arctg a + \pi k, k \in Z$

В $\arcsin a + \pi k, k \in Z$

Г $(-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$

Д $(-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

- 8.** Знайдіть значення функції $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ у точці $x = 0$.
- 9.** Знайдіть суму S нулів функції $y = \cos \frac{x}{2} + 1$ на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$. У відповідь запишіть $\frac{S}{\pi}$.
- 10.** Розв’яжіть рівняння $\frac{2 \cos x + 1}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = 0$. У відповідь запишіть кількість усіх його коренів.
- 11.** Знайдіть найбільший від’ємний корінь рівняння $\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1$.
- 12.** Для яких значень параметра a рівняння $\sin x = 3 - 2a$ має корені?

Рівень С

- 1.** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та множиною коренів (А–Д) рівняння.

Рівняння

1 $\cos 3x = \frac{1}{2}$

2 $\cos^2 0,5x - \sin^2 0,5x = 0,5\sqrt{2}$

3 $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x = 0,5\sqrt{3}$

4 $\cos \frac{1}{3}x = 0$

Множина коренів
рівняння

А $\pm \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$

Б $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z$

В $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Г $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$

Д $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

- 2.** Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{(1 - 2 \cos x)^4}{6}$. (ЗНО, 2013 р.).
- 3.** Розв’яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Укажіть, скільки коренів рівняння належать проміжку $[-\pi; 2\pi]$.

4. Знайдіть найменше значення параметра a , при якому має корені рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2a^2 + 5a - 6$.
5. Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2\sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x}$ на проміжку $[-\pi; 0,75\pi]$.
6. Знайдіть суму коренів рівняння $2\sin x - 3\cos 2x = 5$ на проміжку $[0^\circ; 540^\circ]$.
7. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$ має розв'язки?
8. Знайдіть найменше значення параметра a , при якому має розв'язки рівняння $\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 6 - 5a - 2a^2$. (ЗНО, 2011 р.).
9. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх його коренів. (ЗНО, 2010 р.).
10. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^8, \\ 4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5. \end{cases}$$
 Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком системи рівнянь. (ЗНО, 2011 р.).

VI. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю основні властивості функції $y = \sin x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю основні властивості функції $y = \cos x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю основні властивості функції $y = \operatorname{tg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю основні властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як описувати основні властивості тригонометричних функцій за їхніми графіками. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю означення найпростіших тригонометричних рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я знаю формули для розв'язування рівняння $\cos x = a$, якщо $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

