

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 7. Показникова функція. Показникові рівняння. Показникові нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

- 1) властивості показникової функції;
- 2) означення функції експоненти;
- 3) побудову графіків показникової функції;
- 4) застосування показникової функції;
- 5) методи розв'язування показникових рівнянь;
- 6) методи розв'язування показникових нерівностей.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $3^{x^2} = 81$. Якщо рівняння має кілька коренів, то вкажіть проміжок, якому належить найменший з них. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -10)$	$[-10; -3)$	$[-3; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; +\infty)$

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 9$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 2]$	$(2; +\infty)$

3. Розв'яжіть нерівність $10^{x+1} > 0,01$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-\infty; -2)$	$(-3; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(1; +\infty)$

4. Скоротіть дріб $\frac{m^{\frac{1}{2}} - 9}{m^{\frac{1}{4}} - 3}$.

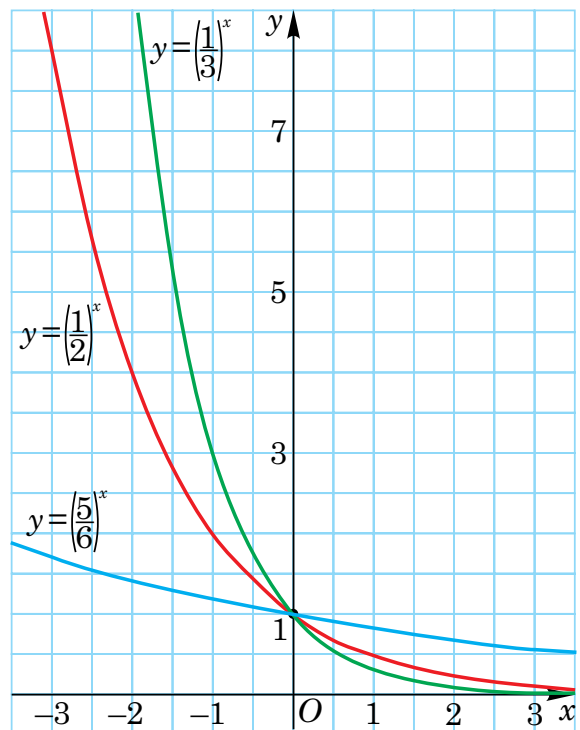
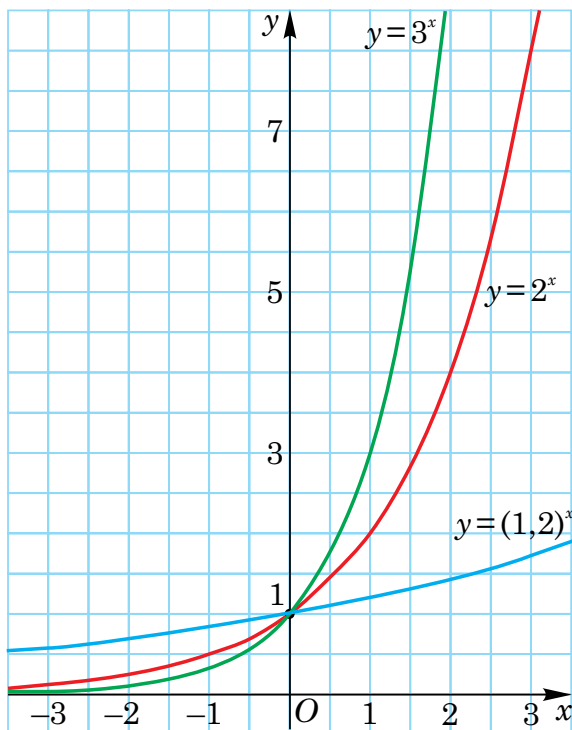
III. Показникова функція та її властивості. Функція експонента

Зафіксуємо деяке додатне число a , відмінне від 1. Тоді кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x . Таким чином, задано функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення R . Цю функцію називають *показниковою функцією*.

Наприклад, $f(x) = 3^x$, $y = 0,3^x$.

Оскільки для $a > 0$, $a \neq 1$, $a^0 = 1$, то графік будь-якої показникової функції проходить через точку $(0; 1)$.

Наведемо приклади графіків показникової функції (див. рисунки).



Властивості показникової функції

Область визначення	$x \in R$.
Область значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Нулів немає.
Проміжки знакосталості	Функція додатна на множині дійсних чисел.
Проміжки зростання та спадання	Якщо $a > 1$, то функція — зростаюча. Якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною

Функція експонента

Показникову функцію $y = e^x$, основою якої є число Ойлера, називають **експонентою**.

Число $e \approx 2,718281828\dots$ є ірраціональним числом, що визначається як $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Примітка. Нескладно запам'ятати 9 цифр після коми числа Ойлера, якщо знати рік народження письменника Жуля Верна, який народився у 1828 році. Бо після 2,7 двічі поспіль цифри експоненти відповідають рокові народження письменника: 2,718281828...

Функція експонента має всі властивості показникової функції, при $a > 1$.

Практичне застосування показникової функції

1. Радіоактивний розпад.

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, де $m(t)$ — маса радіоактивної речовини в момент часу t , m_0 — початкова маса речовини, T — період піврозпаду (проміжок часу, за який початкова кількість речовини зменшується вдвічі).

2. Зміна атмосферного тиску залежно від висоти підйому.

$p(h) = p_0(0,3)^h$, де $p(h)$ — атмосферний тиск на висоті h , p_0 — атмосферний тиск на рівні моря, h — висота над рівнем моря.

3. Складні відсотки.

1) Формула складних відсотків у спрощеному вигляді: $A(n) = A_0(1+r)^n$.

2) Формула складних відсотків в ускладненому вигляді: $A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Сума $A(t)$ (грн) залежить від часу t (в роках або місяцях), A_0 — основна сума накопичення складних відсотків (сума вкладу або інвестиції), за річною відсотковою ставкою r %.

Значення n — кількість періодів нарахування відсотків за рік або місяць.

При збільшенні n основа степеня природним чином наближається до числа e .

4. Розмноження бактерій.

$N(t) = N_0 a^{kt}$, де $N(t)$ — кількість бактерій, розмножена за час t , N_0 — початкова кількість бактерій, t — час розмноження бактерій, числа k та a — деякі константи, для різних видів бактерій вони різні, а в «ідеальних» умовах $a \approx e$.

5. Збільшення товщини стовбура дерева.

$M = M_0 e^{kt}$, де M — кількість деревини у момент спостереження (у м³), M_0 — початкова кількість деревини (у м³), t — час (у роках), який відраховується з моменту, коли об'єм деревини був M_0 , число k — деяка константа, яка має певне значення для різних видів деревини.

Приклад 1. Обчисліть $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[4]{2^2}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$

Відповідь. 2.

IV. Розв'язування показникових рівнянь

Означення. Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня, називають **показниковим рівнянням**.

Означення. Рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим показниковим рівнянням**.

Якщо $b > 0$, то коренем рівняння $a^x = b$ є число $x = \log_a b$.

Якщо $b \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має.

Методи розв'язування показникових рівнянь

Показникові рівняння умовно можна класифікувати за методами їхнього розв'язування (див. таблицю).

№	Види рівнянь	Приклади
1.	Рівняння, що розв'язуються переходом до рівних основ.	1) $2^x = 4^5$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-1}$.
2.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою переходу до однакового показника степеня.	1) $5^{2x-4} = 49^{2-x}$; 2) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$.
3.	Рівняння, що розв'язуються за допомогою винесення спільного множника за дужки.	1) $5^{x+1} + 5^x = 150$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$.
4.	Рівняння, що зводяться до алгебричних за допомогою заміни змінних.	1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; 2) $4^x + 2^x = 72$.
5.	Однорідні рівняння, відносно показникових функцій.	1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; 2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$.
6.	Рівняння, що розв'язуються графічним методом або за допомогою властивостей функцій.	1) $3^x = 11 - x$; 2) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння так: $2^{7-3x} = (2^{-1})^{x-4}$.

Тоді $2^{7-3x} = 2^{4-x}$, $7 - 3x = 4 - x$, $2x = 3$, $x = 1,5$.

Відповідь. 1,5.

V. Розв'язування показникових нерівностей

Означення. Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають **показниковою**.

Розв'язування показникових нерівностей, як правило, ґрунтується на властивостях показникової функції, а саме:

- функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;
- функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;
- функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, якщо $a > 1$.

Показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$, якщо $0 < a < 1$.

Види нерівностей	Приклади
Показникові нерівності, що розв'язуються з використанням монотонності показникової функції.	1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$, 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$, 3) $2^{\frac{3x}{2}+3} > 16$, 4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+2-x^2} \leq \frac{25}{36}$.
Показникові нерівності, які розв'язуються за допомогою розкладу на множники.	1) $5^{x+1} + 5^x > 150$, 2) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.
Показникові нерівності, які розв'язуються методом заміни змінних.	1) $4^x + 2^{x+1} - 24 < 0$, 2) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$.

Оскільки основа менша від 1, то нерівність рівносильна нерівності $2x - 3,5 > 0,5$.

Звідки, $x > 2$.

Відповідь. $(2; +\infty)$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть множину значень функції $y = (1,6)^x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(0; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; -0,5)$

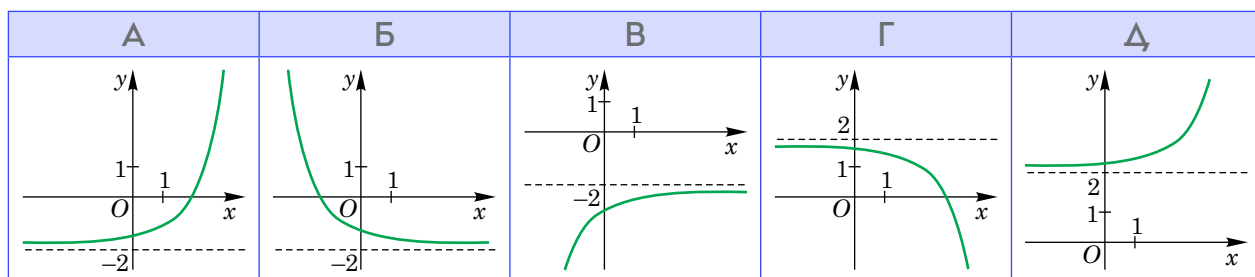
2. Знайдіть область визначення функції $y = 2^{\sqrt{2x-1}}$.

А	Б	В	Г	Д
R	$[0,5; +\infty)$	$(0,5; +\infty)$	$(-\infty; 0,5]$	інша відповідь

3. Укажіть функцію, яка є зростаючою на всій області визначення:

А	Б	В	Г	Д
$y = \left(\frac{3}{8}\right)^x$	$y = 0,2^x$	$y = \left(\frac{3}{5}\right)^{-x}$	$y = 0,25^x$	$y = x^2 + 1$

4. Укажіть графік функції $y = 2 - 2^x$. (Пробне ЗНО, 2005 р.).



5. Знайдіть множину значень функції $y = 6^{|x|}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1]$	$[1; +\infty)$	R	$(0; +\infty)$	інша відповідь

6. Розв'яжіть рівняння $3^{7x} = 9$. Отриманий корінь рівняння округліть до десятих. (ЗНО, 2019 р.).

А	Б	В	Г	Д
0,2	0,29	0,3	0,4	3,5

7. Розв'яжіть рівняння $4^x = 8$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
0,5	$\frac{2}{3}$	1,5	2	32

8. Якому проміжку належить корінь рівняння $3^x = \frac{1}{27}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5)$	$(-5; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; +\infty)$

9. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$

10. Розв'яжіть рівняння $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
немає коренів	$x = -1$	$x = -0,5$	$x = 0,5$	$x = 1$

11. Укажіть число, яке є коренем рівняння $5^{x-2} = 25$.

А	Б	В	Г	Д
7	4	3	2	1

12. Розв'яжіть рівняння $2^{2x} = \frac{1}{2^3}$. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	-1,5	1,5	2

13. Якому проміжку належить корінь рівняння $5^{x+1} = 125$?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 10)$	$[10; 25)$	$[25; 625]$

14. Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$. (ЗНО, 2018 р.).

А	Б	В	Г	Д
$[34,5; +\infty)$	$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; 4,5]$	$[4,5; +\infty)$

15. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 5^x < 25, \\ 2 - x < 8. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(2; 6)$	$(2; +\infty)$	$(-6; 5)$	$(-\infty; -6)$	$(-6; 2)$

16. Розв'яжіть нерівність $3^x < 27 \cdot 3^{-x}$. (ЗНО, 2021 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; 3)$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

17. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x = 16^{-1} \end{cases}$. Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок цієї системи, то $x_0 \cdot y_0 = \dots$ (ЗНО, 2016 р.).

А	Б	В	Г	Д
-36	-14	-6	4	6

18. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{2^{3x+1} - 16}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$(-\infty; -1)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

19. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot (0,3)^x < 0,18$. (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 0,3)$	$(0,3; +\infty)$	$(0; 2)$

20. Розв'яжіть нерівність $0,5^{2x+7} \leq 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4,5]$	$[-2,5; +\infty)$	$[-4,5; +\infty)$	$(-\infty; -2,5]$	$[2,5; +\infty)$

Рівень В

1. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^{x+3} - 3 \cdot 2^x = 10\sqrt{2}$? (ЗНО, 2019 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1)$	$[1; 2)$	$[2; +\infty)$

2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

А	Б	В	Г	Д
$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; 3]$	$[3; +\infty)$	R

3. Розв'яжіть нерівність $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3y + 2^x = -13, \\ 2^x - y = 15. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок цієї системи, то $x_0 + y_0 = \dots$

А	Б	В	Г	Д
-4	-3	1	5	15

5. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x < 81, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 4)$	$[5; +\infty)$	$[-5; -4)$	$(-4; 5]$	$[-5; 4)$

6. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною розв’язків (А–Д) нерівності.

Нерівність

1 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$

2 $3^{\frac{2x+1}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3 $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} < 56$

4 $0,6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$

Множина розв’язків нерівності

А $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$

Б $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$

В $(-\infty; -5) \cup (-3; 3)$

Г $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$

Д $(-\infty; 5)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її областю визначення (А–Д).

Функція

1 $f(x) = \sqrt{1 - 0,5^x}$

2 $f(x) = \sqrt{0,25^x - 16}$

3 $f(x) = \sqrt{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} - 9^{-0,5}}$

4 $f(x) = \sqrt{0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} - 1}$

Область визначення функції

А $(-\infty; -2]$

Б $[-2; 1) \cup [2; +\infty)$

В $[0; +\infty)$

Г $(-\infty; -2] \cup (1; 2]$

Д $[-1; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

8. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв’язків (А–Д).

Нерівність

1 $1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16$

2 $1 \leq 2^x \leq 16$

3 $1 \leq 16^x \leq 2$

4 $1 \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x \leq 2$

Множина розв’язків нерівності

А $[-0,25; 0]$

Б $[-4; 0]$

В $[0; 0,25]$

Г $[0,25; 4]$

Д $[0; 4]$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

9. Розв’яжіть рівняння $3^x \cdot 4^x = (12^{x+1})^5$. (ЗНО, 2013 р.).

10. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x-2y} = \frac{1}{3}, \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$ Для одержаного розв’язку $(x_0; y_0)$ системи обчисліть $x_0 \cdot y_0$. (ЗНО, 2009 р.).

Рівень С

1. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $2^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

2 $2^{|x|+2} > 8$

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > 8$

4 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

Множина розв'язків нерівності

А $(1; +\infty)$

Б $[-1; 1]$

В $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д не має розв'язків

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

2. Розв'яжіть рівняння $0,125 \cdot 8^{2x-5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$.
3. Розв'яжіть нерівність $16^x - 18 \cdot 4^x + 32 \leq 0$. У відповідь запишіть різницю між найбільшим та найменшим розв'язками нерівності. Якщо таку різницю вказати неможливо, то у відповідь запишіть число 100. (Пробне ЗНО, 2007 р.).
4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{\frac{1}{x}}} = \sqrt[9]{4}$. У відповідь запишіть суму коренів рівняння.
5. Розв'яжіть рівняння $2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{x+1}} = 12 + 2^{\sqrt{x-1}}$.
6. Розв'яжіть нерівність $3^{1+\sqrt{x+1}} + 3^{2-\sqrt{x+1}} \geq 28$. У відповідь запишіть найменший цілий розв'язок нерівності.
7. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{27} \cdot 3^{7x-x^2} \geq \frac{\sqrt{243}}{3^{2x+1}}$. У відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків нерівності.
8. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $7^{x-5} > 3^{x^2+x-30}$.
9. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + ax + 3^{2+y^2} = 27, \\ x + 3^{1+y^2} = 8, \end{cases}$ де x, y — змінні, a — число. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.
10. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y — змінні, a — число. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.
11. Розв'яжіть рівняння $25^x - (2a+1) \cdot 5^x + a^2 + a = 0$, де a — параметр. У відповідь запишіть найменше ціле значення a , за якого рівняння має два корені.
12. Розв'яжіть нерівність $(2^x - 8)(x^2 - 4x + 3) > 0$. У відповідь запишіть добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

Рефлексія

1) Я сьогодні навчився/навчилась

2) Мені здалося цікавим

3) У мене залишилися запитання щодо

