

Урок 8. Логарифмічна функція та її застосування**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

- 1) означення, графік та властивості логарифмічної функції;
- 2) обчислення області визначення логарифмічної функції;
- 3) застосування властивостей логарифмів для спрощення виразів;
- 4) розв'язування логарифмічних рівнянь;
- 5) розв'язування логарифмічних нерівностей;
- 6) застосування логарифмічних рівнянь та логарифмічних нерівностей для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

- 1.** Укажіть проміжок, якому належить менший корінь рівняння $3^{x^2} = 81$. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 2)$	$(2; +\infty)$

- 2.** Укажіть число, яке є розв'язком нерівності $-4 < 6 - 2x < 2$. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
1	2	0	3	5

3. Обчисліть суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 3x - 5 < 2x, \\ 12 - 9x \leq 3x. \end{cases}$ (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
14	10	9	15	7

4. Розв'яжіть нерівність $2^{3-x} > \frac{1}{4}$. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(-1; +\infty)$	$(5; +\infty)$

5. Установіть відповідність між функцією (1–3) та властивістю її графіка (А–Д). (НМТ, 2024 р.).

Функція
1 $y = \sqrt{x+4}$

2 $y = \frac{4}{x}$

3 $y = 4^x$

Властивість графіка функції

А розташований лише в першій чверті

Б має спільну точку з віссю x

В проходить через точку $(0; 1)$

Г не перетинає вісь y

Д симетричний відносно осі y

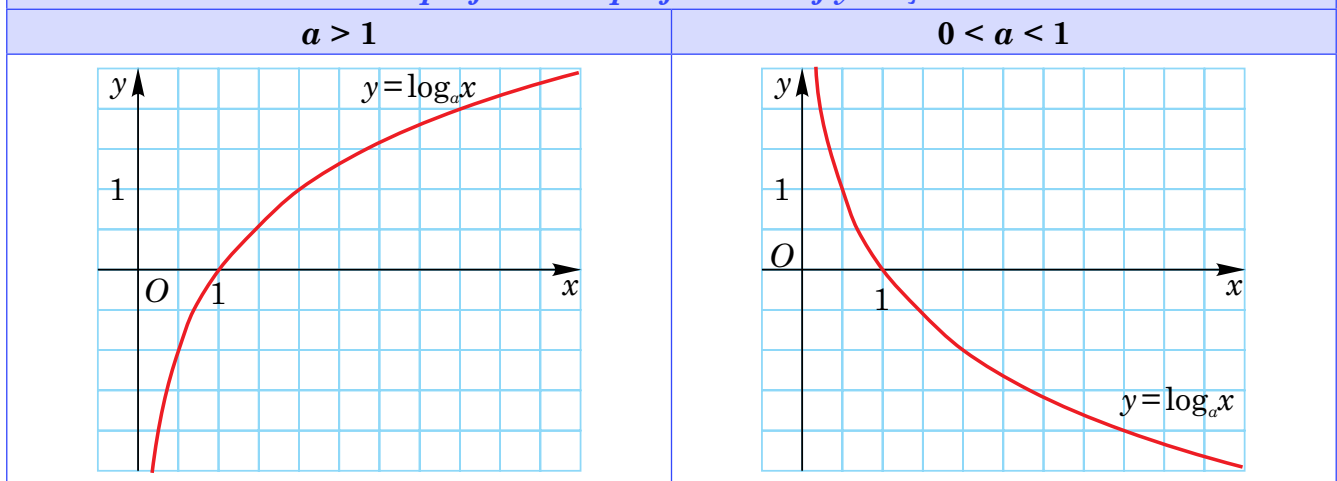
	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Логарифмічна функція та її графік. Властивості логарифмічної функції

Означення. Функція вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, називається **логарифмічною функцією**.

Логарифмічна функція є оберненою до показникової функції $y = a^x$.

Графік логарифмічної функції



Властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$

- Область визначення функції $x \in (0; +\infty)$.
- Множина значень функції $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Нулі функції: $x = 1$.

4. Функція ні парна, ні непарна.
5. Якщо $a > 1$, то функція зростаюча. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадна.

IV. Розв'язування логарифмічних рівнянь (3–4 хв)

Означення. Рівняння, в якому змінна знаходиться під знаком логарифма, називають **логарифмічним рівнянням**.

Наприклад, з означення логарифма випливає, що коренем рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, є число $x = a^b$.

Основні типи логарифмічних рівнянь

1. Якщо $\log_a f(x) = 0$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = 1$.
2. Якщо $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = a^b$.
3. Якщо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Примітка. Розв'язують ту систему, в якій простіша нерівність.

V. Розв'язування логарифмічних нерівностей (4–5 хв)

Означення. Нерівність, у якій змінна знаходиться під знаком логарифма, називають **логарифмічною нерівністю**.

Наприклад, найпростіші логарифмічні нерівності $\log_a x \vee b$ розв'язуються наступним чином:

$\log_a x > b$		$\log_a x < b$	
Якщо $a > 1$, то: $x > a^b$, $x \in (a^b; +\infty)$.	Якщо $0 < a < 1$, то: $0 < x < a^b$, $x \in (0; a^b)$.	Якщо $a > 1$, то: $0 < x < a^b$, $x \in (0; a^b)$.	Якщо $0 < a < 1$, то: $x > a^b$, $x \in (a^b; +\infty)$.

Розглянемо способи розв'язування нерівностей виду $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$.

1. Якщо $a > 1$, то: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
2. Якщо $0 < a < 1$, то: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $y = \log_x \frac{4x-1}{x+2}$.

Розв'язання. Оскільки підлогарифмічний вираз завжди додатний, а основа логарифма також додатна і не дорівнює 1, то маємо систему:
$$\begin{cases} \frac{4x-1}{x+2} > 0, \\ x > 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Використовуючи метод інтервалів, отримуємо: $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x-1 = x^2 - x - 16, \\ x-1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ x = 5, \\ x > 1. \end{cases}$$

Отже, $x = 5$.

Відповідь. 5.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,1} x \geq \log_{0,1} 9$.

Розв'язання. Оскільки $0,1 < 1$, то $0 < x \leq 9$.

Отже, $x \in (0; 9]$.

Відповідь. $(0; 9]$.

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для визначення кислотності розчину використовують водневий показник pH , який обчислюють за формулою $pH = -\log_{10}[H^+]$, де $[H^+]$ — концентрація іонів Гідрогену (в моль/л). Для певного напою pH дорівнює 3. Знайдіть концентрацію іонів Гідрогену $[H^+]$.

А	Б	В	Г	Д
10^3	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	3^{-1}

VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ

1. $\log_3 \frac{1}{27} = \dots$ (HMT, 2023 p.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	2

[illegible]

2. Знайдіть область визначення функції $y = |\lg x|$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	інша відповідь

[illegible]

3. Обчисліть значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1)$, якщо $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{3}$	1	-1	інша відповідь

[illegible]

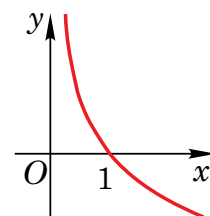
4. Обчисліть: $0,25^{\log_{0,5} 4}$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
16	0,5	0,25	4	2

[illegible]

5. На рисунку зображено ескіз графіка однієї з наведених функцій. Укажіть цю функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^{-4}$	$y = 4^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y = \log_4 x$	$y = \log_{\frac{1}{4}} x$

[illegible]

6. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3 x = -2$?

А	Б	В	Г	Д
$[-6; -3)$	$[-3; 0)$	$[0; 3)$	$[3; 6)$	$[6; 9]$

7. Укажіть множину коренів рівняння $\log_{0,6}(5x^2 - 8) = \log_{0,6}(-3x)$.

А	Б	В	Г	Д
$\{1; -1,6\}$	$\{-1; 1,6\}$	$\{1\}$	$\{-1,6\}$	$\{-1\}$

8. Розв'яжіть рівняння $2^{2-3x} = 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2 - \log_2 5}{3}$	$\frac{2 - \log_5 2}{3}$	$\frac{\log_2 5 - 2}{3}$	0,4	$\log_2 5 - 2$

9. Розв'яжіть рівняння $\lg(3x - 2) = 3 - \lg 25$.

А	Б	В	Г	Д
14	15	16	12	18

10. Розв'яжіть рівняння $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3x-5} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

11. Розв'яжіть нерівність $\log_3(2x - 1) < 2$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(0,5; 5)$	$(-\infty; 3,5)$	$(0,5; 3,5)$	$(-\infty; 5)$	$(0,5; +\infty)$

12. Укажіть кількість цілих розв'язків нерівності $\log_3 \frac{2x+5}{x+1} \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	більше трьох	жодного

13. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_{0,8}(x^2 - 2x - 3) \leq \log_{0,8}(9 - x)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$	$[-3; 4]$	$(-\infty; 9)$	$(-\infty; -3] \cup [4; 9)$

14. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,5} \log_2 \log_9(x - 1) > 0$.

(Пробне ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
11	2	82	4	10

15. Розв'яжіть нерівність $x \log_{0,7} 7 - 2 \log_{0,7} 7 > 0$ і знайдіть суму цілих розв'язків, які належать проміжку $[-3; 3]$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-5	-3	-10	обчислити неможливо

16. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Вираз

1 $\frac{\lg 27}{\lg 3}$

2 $\lg 0,02 - \lg 2$

3 $\lg^2 0,1$

Значення виразу

А 3

Б 2

В 1

Г -1

Д -2

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- 17.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та її областю визначення (А–Д).

Функція	Область визначення функції	А	Б	В	Г	Д
1 $y = \sqrt{\lg x}$	А $[1; +\infty)$	1	☐	☐	☐	☐
2 $y = \lg(x - x^2)$	Б $(-\infty; +\infty)$	2	☐	☐	☐	☐
3 $y = \lg x^2$	В $(0; 1)$	3	☐	☐	☐	☐
	Г $(0; 1) \cup (1; +\infty)$					
	Д $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$					

[illegible]

- 18.** Установіть відповідність між подвійною нерівністю (1–3) та множиною її розв’язків (А–Д).

<i>Подвійна нерівність</i>	<i>Множина розв'язків нерівності</i>	А Б В Г Д
1 $0 \leq \log_{0,2} x \leq 1$	А [1; 5]	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $0 \leq \log_{0,5} x \leq 1$	Б [0,5; 1]	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $0 \leq \log_5 x \leq 1$	В [0,2; 1]	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г [0,2; 5]	
	Д [5; 25]	

[illegible]

- 19.** Знайдіть найменше ціле значення a , за якого розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} \log_5 \frac{x}{y} = a - 18, \\ \log_5 x + 2 \log_5 y = 3a + 12 \end{cases} \text{ задовольняє умову } \begin{cases} x_0 < \sqrt{5}, \\ y_0 > 5. \end{cases} \quad (\text{НМТ, 2024 р.}).$$

[illegible]

Відповідь.

- 20.** Обчисліть: $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$. (ЗНО, 2007 р.).

[illegible]

Відповідь.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке логарифм числа і можу пояснити його зміст. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я можу знаходити значення логарифмів без калькулятора. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю означення логарифмічної функції і можу назвати її область визначення та множину значень. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я можу описати, як виглядає графік логарифмічної функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію розв'язувати логарифмічні рівняння. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію використовувати властивості логарифмів для спрощення рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як основа логарифма впливає на знак нерівності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я вмію розв'язувати логарифмічні нерівності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я вмію застосовувати логарифмічну функцію для розв'язування практичних задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

