

Урок 8. Логарифмічна функція та її застосування**План уроку**

1. Логарифмічна функція та її графік.
2. Властивості логарифмічної функції.
3. Знаходження нулів логарифмічної функції. Розв'язування логарифмічних рівнянь.
4. Розв'язування логарифмічних нерівностей.
5. Застосування логарифмічної функції для розв'язування практичних задач.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає, фіксує інформацію з різних джерел [12 МАО 2.1.2–1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями, ураховує емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2–1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2–2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3–1];

доцільно та правильно використовує математичну термінологію і символіку [12 МАО 4.3.1–2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення.

- 3) Сформулюйте практичну задачу, розв'язання якої можливе на будь-якому етапі уроку, на ваш розсуд. При розв'язанні задачі об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 5) Пригадайте з учнями/ученицями вивчений матеріал із теми «Логарифмічна функція та її застосування». Короткі теоретичні відомості наведено.
- 6) Запропонуйте учням/ученицям пройти тестування з теми «Логарифмічна функція та її застосування», оскільки урок є уроком підготовки до ЗНО/НМТ. Відповіді до тестових завдань запропоновано. Якщо потрібно оцінити рівень навчальних досягнень учнів/учениць, то критерії оцінювання наведено.
- 7) Мотивуйте учнів/учениць до розв'язування вправ та аналізуйте типові помилки. Акцнтуйте увагу учнів/учениць на актуальності даної теми в завданнях формату ЗНО/НМТ.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна навести приклади практичних задач, у яких величини змінюються занадто швидко або занадто повільно? Наведіть приклади.
- 2) Чи існує функція, яка є оберненою до показникової функції?
- 3) Чи існує корінь рівняння $3^x = 8$?
- 4) Чи зустрічали ви логарифми у завданнях ЗНО/НМТ?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Укажіть проміжок, якому належить менший корінь рівняння $3^{x^2} = 81$. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 2)$	$(2; +\infty)$

Відповідь. В.

2. Укажіть число, яке є розв'язком нерівності $-4 < 6 - 2x < 2$. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
1	2	0	3	5

Відповідь. Г.

3. Обчисліть суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 3x - 5 < 2x, \\ 12 - 9x \leq 3x. \end{cases}$ (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
14	10	9	15	7

Відповідь. Б.

4. Розв'яжіть нерівність $2^{3-x} > \frac{1}{4}$. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(-1; +\infty)$	$(5; +\infty)$

Відповідь. В.

5. Установіть відповідність між функцією (1–3) та властивістю її графіка (А–Д). (НМТ, 2024 р.).

Функція

1 $y = \sqrt{x+4}$

2 $y = \frac{4}{x}$

3 $y = 4^x$

Властивість графіка функції

А розташований лише в першій чверті

Б має спільну точку з віссю x

В проходить через точку $(0; 1)$

Г не перетинає вісь y

Д симетричний відносно осі y

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Б, 2 – Г, 3 – В.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Для визначення кислотності розчину використовують водневий показник pH , який обчислюють за формулою $pH = -\log_{10}[H^+]$, де $[H^+]$ — концентрація іонів Гідрогену (в моль/л). Для певного напою pH дорівнює 3. Знайдіть концентрацію іонів Гідрогену $[H^+]$.

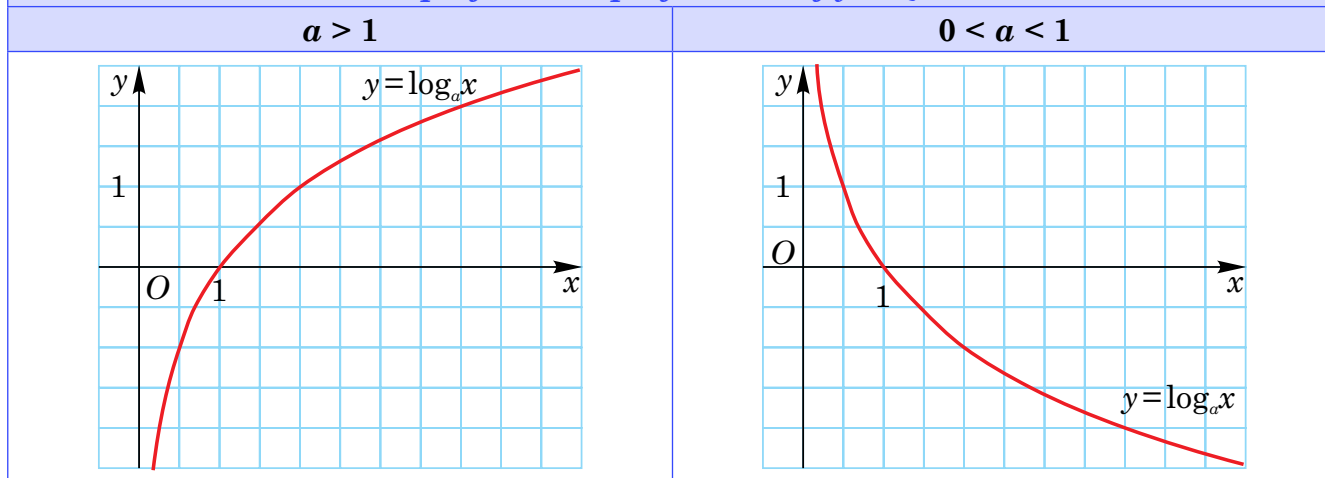
А	Б	В	Г	Д
10^3	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	3^{-1}

III. Логарифмічна функція та її графік. Властивості логарифмічної функції

Означення. Функція вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, називається **логарифмічною функцією**.

Логарифмічна функція є оберненою до показникової функції $y = a^x$.

Графік логарифмічної функції



Властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$

1. Область визначення функції $x \in (0; +\infty)$.
2. Множина значень функції $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Нулі функції: $x = 1$.
4. Функція ні парна, ні непарна.
5. Якщо $a > 1$, то функція зростаюча. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадна.

IV. Розв'язування логарифмічних рівнянь (3–4 хв)

Означення. Рівняння, в якому змінна знаходиться під знаком логарифма, називають **логарифмічним рівнянням**.

Наприклад, з означення логарифма випливає, що коренем рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, є число $x = a^b$.

Основні типи логарифмічних рівнянь

1. Якщо $\log_a f(x) = 0$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = 1$.
2. Якщо $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = a^b$.
3. Якщо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Примітка. Розв'язують ту систему, в якій простіша нерівність.

V. Розв'язування логарифмічних нерівностей (4–5 хв)

Означення. Нерівність, у якій змінна знаходиться під знаком логарифма, називають **логарифмічною нерівністю**.

Наприклад, найпростіші логарифмічні нерівності $\log_a x \vee b$ розв'язуються наступним чином:

$\log_a x > b$		$\log_a x < b$	
Якщо $a > 1$, то: $x > a^b$, $x \in (a^b; +\infty)$.	Якщо $0 < a < 1$, то: $0 < x < a^b$, $x \in (0; a^b)$.	Якщо $a > 1$, то: $0 < x < a^b$, $x \in (0; a^b)$.	Якщо $0 < a < 1$, то: $x > a^b$, $x \in (a^b; +\infty)$.

Розглянемо способи розв'язування нерівностей виду $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$.

1. Якщо $a > 1$, то: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$
2. Якщо $0 < a < 1$, то: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Ілюстративні приклади (10–15 хв)

6. Знайдіть область визначення функції $y = \log_x \frac{4x-1}{x+2}$.

Розв'язання. Оскільки підлогарифмічний вираз завжди додатний, а основа логарифма також додатна і не дорівнює 1, то маємо систему: $\begin{cases} \frac{4x-1}{x+2} > 0, \\ x > 0, x \neq 1. \end{cases}$

Використовуючи метод інтервалів, отримуємо: $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

7. Розв'яжіть рівняння $0,3^{2x-1} = 7$.

Розв'язання. За означенням логарифма: $\log_{0,3} 7 = 2x - 1$.

Тоді $2x = 1 + \log_{0,3} 7$, $x = \frac{1 + \log_{0,3} 7}{2}$, $x = 0,5 \log_{0,3} 2,1$.

Відповідь. $0,5 \log_{0,3} 2,1$.

8. Розв'яжіть рівняння $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x-1 = x^2 - x - 16, \\ x-1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ x = 5, \\ x > 1. \end{cases}$$

Отже, $x = 5$.

Відповідь. 5.

9. Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,1} x \geq \log_{0,1} 9$.

Розв'язання. Оскільки $0,1 < 1$, то $0 < x \leq 9$.

Отже, $x \in (0; 9]$.

Відповідь. $(0; 9]$.

10. Розв'яжіть нерівність: $\lg(x^2 - 2) \geq \lg(4x + 3)$.

Розв'язання. Оскільки основа логарифмів більша за 1, то при потенціюванні знак нерівності зберігається:

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 4x + 3, \\ 4x + 3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ 4x > -3; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty), \\ x > -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Отже, $x \in \left(-\frac{3}{4}; -1\right] \cup [5; +\infty)$.

Відповідь. $\left(-\frac{3}{4}; -1\right] \cup [5; +\infty)$.

11. Розв'яжіть нерівність $\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2(2-x)$.

Розв'язання. Оскільки основа логарифмів більша за 1, то при потенціюванні знак нерівності зберігається:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+3} > 2-x, \\ 2-x > 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{4+(x-2)(x+3)}{x+3} > 0, \\ x < 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+3} > 0, \\ x < 2; \end{cases} \begin{cases} x \in (-3; -2) \cup (1; +\infty), \\ x < 2. \end{cases}$$

Отже, $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $(-3; -2) \cup (1; 2)$.

12. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3}(x+8) - \log_{0,3}(x-4) \leq \log_{0,3}(x+5)$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ нерівності:
$$\begin{cases} x+8 > 0, \\ x-4 > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases}$$
 Звідси $x \in (4; +\infty)$.

Запишемо нерівність у вигляді $\log_{0,3} \frac{x+8}{x-4} \leq \log_{0,3}(x+5)$, враховуючи, що $x \in (4; +\infty)$.

Оскільки основа логарифмів менша від 1, то при потенціюванні знак нерівності змінюється:

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x-4} \geq x+5, \\ x \in (4; +\infty); \end{cases} \begin{cases} \frac{x+8-(x+5)(x-4)}{x-4} \geq 0, \\ x \in (4; +\infty); \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2-28}{x-4} \leq 0, \\ x \in (4; +\infty); \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -2\sqrt{7}] \cup (4; 2\sqrt{7}], \\ x \in (4; +\infty). \end{cases}$$

Отже, $x \in (4; 2\sqrt{7}]$.

Відповідь. $(4; 2\sqrt{7}]$.

13*. Розв'яжіть нерівність: $2\log_4^2(x+3) - \log_4(x+3) - 1 < 0$.

Розв'язання. Уведемо заміну: $\log_4(x+3) = t$. Розв'яжемо нерівність:

$$2t^2 - t - 1 < 0, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

Повертаємось до заміни: $\log_4(x+3) \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, тобто:

$$\begin{cases} \log_4(x+3) > -\frac{1}{2}, \\ \log_4(x+3) < 1. \end{cases} \begin{cases} x+3 > 4^{-\frac{1}{2}}, \\ x+3 < 4, \\ x+3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -2,5, \\ x < 1. \end{cases} \quad x \in (-2,5; 1).$$

Відповідь. $(-2,5; 1)$.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для визначення кислотності розчину використовують водневий показник pH , який обчислюють за формулою $pH = -\log_{10}[H^+]$, де $[H^+]$ — концентрація іонів Гідрогену (в моль/л). Для певного напою pH дорівнює 3. Знайдіть концентрацію іонів Гідрогену $[H^+]$.

А	Б	В	Г	Д
10^3	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	3^{-1}

Розв'язання. Якщо $pH = 3$, то $-\log_{10}[H^+] = 3$ або $\log_{10}[H^+] = -3$. Звідси, $[H^+] = 10^{-3}$.

Відповідь. Б.

VII. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ

1. $\log_3 \frac{1}{27} = \dots$ (HMT, 2023 p.).

A	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	2

2. Знайдіть область визначення функції $y = |\lg x|$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	інша відповідь

[illegible]

3. Обчисліть значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1)$, якщо $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{3}$	1	-1	інша відповідь

[illegible]

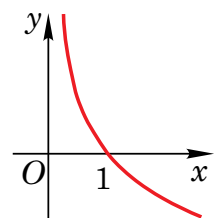
4. Обчисліть: $0,25^{\log_{0,5} 4}$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
16	0,5	0,25	4	2

[illegible]

5. На рисунку зображено ескіз графіка однієї з наведених функцій. Укажіть цю функцію.

A	Б	В	Г	Д
$y = x^{-4}$	$y = 4^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y = \log_4 x$	$y = \log_{\frac{1}{4}} x$

[illegible]

6. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3 x = -2$?

А	Б	В	Г	Д
$[-6; -3)$	$[-3; 0)$	$[0; 3)$	$[3; 6)$	$[6; 9]$

7. Укажіть множину коренів рівняння $\log_{0,6}(5x^2 - 8) = \log_{0,6}(-3x)$.

А	Б	В	Г	Д
$\{1; -1,6\}$	$\{-1; 1,6\}$	$\{1\}$	$\{-1,6\}$	$\{-1\}$

8. Розв'яжіть рівняння $2^{2-3x} = 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2 - \log_2 5}{3}$	$\frac{2 - \log_5 2}{3}$	$\frac{\log_2 5 - 2}{3}$	0,4	$\log_2 5 - 2$

9. Розв'яжіть рівняння $\lg(3x - 2) = 3 - \lg 25$.

А	Б	В	Г	Д
14	15	16	12	18

10. Розв'яжіть рівняння $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3x-5} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

11. Розв'яжіть нерівність $\log_3(2x - 1) < 2$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$(0,5; 5)$	$(-\infty; 3,5)$	$(0,5; 3,5)$	$(-\infty; 5)$	$(0,5; +\infty)$

12. Укажіть кількість цілих розв'язків нерівності $\log_3 \frac{2x+5}{x+1} \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	більше трьох	жодного

13. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_{0,8}(x^2 - 2x - 3) \leq \log_{0,8}(9 - x)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$	$[-3; 4]$	$(-\infty; 9)$	$(-\infty; -3] \cup [4; 9)$

14. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,5} \log_2 \log_9(x - 1) > 0$.

(Пробне ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
11	2	82	4	10

15. Розв'яжіть нерівність $x \log_{0,7} 7 - 2 \log_{0,7} 7 > 0$ і знайдіть суму цілих розв'язків, які належать проміжку $[-3; 3]$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-5	-3	-10	обчислити неможливо

16. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Вираз

1 $\frac{\lg 27}{\lg 3}$

2 $\lg 0,02 - \lg 2$

3 $\lg^2 0,1$

Значення виразу

А 3

Б 2

В 1

Г -1

Д -2

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

- 17.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та її областю визначення (А–Д).

Функція	Область визначення функції	А	Б	В	Г	Д
1 $y = \sqrt{\lg x}$	А $[1; +\infty)$	☐	☐	☐	☐	☐
2 $y = \lg(x - x^2)$	Б $(-\infty; +\infty)$	☐	☐	☐	☐	☐
3 $y = \lg x^2$	В $(0; 1)$	☐	☐	☐	☐	☐
	Г $(0; 1) \cup (1; +\infty)$					
	Д $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$					

[illegible]

- 18.** Установіть відповідність між подвійною нерівністю (1–3) та множиною її розв’язків (А–Д).

<i>Подвійна нерівність</i>	<i>Множина розв'язків нерівності</i>	А Б В Г Д
1 $0 \leq \log_{0,2} x \leq 1$	А [1; 5]	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $0 \leq \log_{0,5} x \leq 1$	Б [0,5; 1]	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $0 \leq \log_5 x \leq 1$	В [0,2; 1]	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г [0,2; 5]	
	Д [5; 25]	

[illegible]

- 19.** Знайдіть найменше ціле значення a , за якого розв'язок (x_0, y_0) системи рівнянь

$$\begin{cases} \log_5 \frac{x}{y} = a - 18, \\ \log_5 x + 2 \log_5 y = 3a + 12 \end{cases} \text{ задовольняє умову } \begin{cases} x_0 < \sqrt{5}, \\ y_0 > 5. \end{cases} \text{ (НМТ, 2024 р.).}$$

[illegible]

Відповідь.

- 20.** Обчисліть: $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$. (ЗНО, 2007 р.).

[illegible]

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

- 1.** Г.
- 2.** Б.
- 3.** Г.
- 4.** А.
- 5.** Д.
- 6.** В.
- 7.** Г.
- 8.** А.
- 9.** А.
- 10.** В.
- 11.** А.
- 12.** В.
- 13.** Д.
- 14.** А.
- 15.** Б.
- 16.** 1 – А, 2 – Д, 3 – В.
- 17.** 1 – А, 2 – В, 3 – Д.
- 18.** 1 – В, 2 – Б, 3 – А.
- 19.** –13.
- 20.** 4.
- 21.** 3.
- 22.** 10000.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Бали	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

№ завдання	16	17	18	19	20	21	22	Сума
Бали	3	3	3	2	2	2	2	32

Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{32} = 0,375$.

2) Коефіцієнт оцінювання 0,375 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку. Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 19 тестових балів за результатами тестування. Тоді, оцінка: $19 \cdot 0,375 = 7$ (балів).

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке логарифм числа і можу пояснити його зміст. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я можу знаходити значення логарифмів без калькулятора. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю означення логарифмічної функції і можу назвати її область визначення та множину значень. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я можу описати, як виглядає графік логарифмічної функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію розв'язувати логарифмічні рівняння. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я вмію використовувати властивості логарифмів для спрощення рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як основа логарифма впливає на знак нерівності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я вмію розв'язувати логарифмічні нерівності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я вмію застосовувати логарифмічну функцію для розв'язування практичних задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Список використаної літератури

- 1) Ключко І. Я. Математика. Алгебра ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.І. / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2024.
- 2) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Ч. II. Алгебра і початки аналізу (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021.
- 3) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х.: Гімназія, 2019.
- 4) Мерзляк А. Г. Математика. 11 кл.: рівень стандарту: збірник задач, тестів і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2019. – 160 с.: іл.