

Урок 9. Похідна функції

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

- 1) формули обчислення похідних функцій;
- 2) обчислення похідних елементарних функцій;
- 3) застосування основних правил обчислення похідних;
- 3) обчислення похідної складеної функції;
- 4) геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної;
- 5) фізичний зміст похідної.

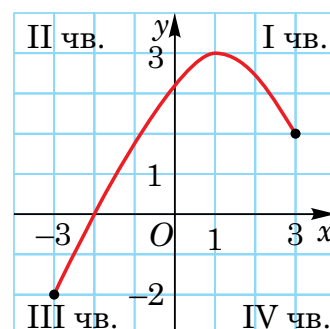
II. Повторення

1. Скоротіть дробовий вираз $\frac{4b^2 + 20b}{25 + 10b + b^2}$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5+b}$	$4b$	$\frac{6}{25}$	$4b(5+b)$	$\frac{4b}{5+b}$

2. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. У яких чвертях розташований графік функції $y = f(x + 3)$? (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
лише в I та II	в усіх чвертях	лише в II та III	лише в I, II та III	лише в I та IV



3. Визначте максимальну швидкість (у м/с) фантастичного зорельота, якщо вона становить 0,01 від швидкості світла у вакуумі. Уважайте, що швидкість світла у вакуумі дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
$3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 0,1^8$	$3 \cdot 10^{0,08}$	$3 \cdot 10^6$

4. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (НМТ, 2023 р.).

Початок речення

1 Функція $y = \log_{0,5} x$

2 Функція $y = \sin x$

3 Функція $y = \frac{1}{2x-2}$

Закінчення речення

А не визначена при $x = 1$.

Б набуває від'ємного значення при $x = 2$.

В є непарною.

Г має лише одну точку локального екстремуму.

Д зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

5. Функція $y = f(x)$ є прямою пропорційністю на множині дійсних чисел. Знайдіть значення функції $g(x) = 3f(x) + \frac{|x|}{8}$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$, якщо графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(2; 7)$. (НМТ, 2025 р.).

III. Похідні елементарних функцій

У таблиці подано формули обчислення похідних елементарних функцій.

Функція $f(x)$	Похідна функції $f'(x)$	Функція $f(x)$	Похідна функції $f'(x)$
k (число)	0	x	1
x^a	ax^{a-1}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

IV. Правила обчислення похідних

Якщо потрібно знаходити похідну не окремої функції, а їхньої суми, різниці, добутку або частки, то використовують правила обчислення похідних.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$, диференційовні у точці x_0 , причому $f(x_0) = f$, $g(x_0) = g$, $f'(x_0) = f'$, $g'(x_0) = g'$. Тоді:

1) $(f + g)' = f' + g'$ — похідна суми;

2) $(f - g)' = f' - g'$ — похідна різниці;

- 3) $(kf)' = kf'$, k — сталe число;
- 4) $(fg)' = f'g + fg'$ — похідна добутку;
- 5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ — похідна частки.

V. Похідна складеної функції

Нехай треба обчислити значення функції $h(x) = \sqrt{4x+1}$ у точці $x_0 = 6$. Зазвичай, спочатку обчислюють значення виразу $4x + 1$ для $x_0 = 6$, тобто $4 \cdot 6 + 1 = 25$, а потім добувають арифметичний квадратний корінь, тобто $\sqrt{25} = 5$. Отже, $h(6) = 5$.

Якщо позначити $f(x) = 4x + 1$, а $g(f) = \sqrt{f}$, то $h(x) = g(f(x))$. У такому випадку кажуть, що $h(x)$ — складена функція, а $f(x)$ — її внутрішня функція.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $g(f(x))$ диференційовна в точці $f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна обчислюється за формулою:
 $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

VI. Геометричний зміст похідної функції (3–4 хв)

Теорема. Похідна функції в точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у цій точці, тобто тангенсу кута між додатним напрямом осі абсцис та цією дотичною.

Якщо $y = f(x)$ — задана функція, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між додатним напрямом осі абсцис та дотичною до графіка даної функції в точці $(x_0; f(x_0))$.

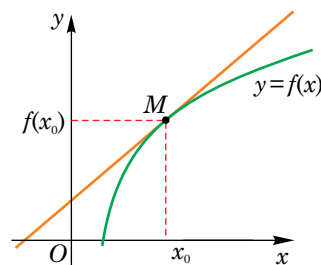
Якщо $f'(x_0) > 0$, то функція зростає, а якщо $f'(x_0) < 0$, то функція спадає.

Рівняння дотичної до графіка функції в деякій точці x_0

Означення. Дотичною до графіка функції, диференційовної в точці x_0 , називається пряма, яка проходить через точку $(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $k = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



VII. Фізичний зміст похідної функції

За допомогою похідної функції можна визначати миттєву швидкість руху тіла та його прискорення в цей момент часу.

Якщо точка рухається по прямій за законом руху $x(t)$, то її миттєва швидкість обчислюється за формулою: $v(t) = x'(t)$.

Означення. Похідна від функції, що є похідною деякої функції $y = f(x)$, називається **другою похідною** функції $y = f(x)$. Позначення: $y'' = f''(x)$.

Означення. Швидкість зміни швидкості руху називають **прискоренням** руху тіла.

Якщо точка рухається по прямій зі швидкістю $v(t)$, то її прискорення обчислюється за формулою: $a(t) = v'(t)$.

Якщо точка рухається по прямій за законом руху $x(t)$, то її прискорення обчислюється за формулою: $a(t) = x''(t)$.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $f'(x) + g'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = x^3 + x^2 - 24x$, $g(x) = 2x^2 + 18$.

У відповідь запишіть кількість цілих розв'язків цієї нерівності.

Розв'язання. Знайдемо похідні заданих функцій: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 24$, $g'(x) = 4x$.

Тоді сума похідних: $f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 6x - 24$.

Складемо нерівність: $3x^2 + 6x - 24 \leq 0$ або $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

Звідси $x \in [-4; 2]$. Отже, розв'язками даної нерівності є сім цілих чисел.

Відповідь. 7.

VIII. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Температура води змінюється за законом $T(t) = 60e^{-0,1t} + 20$, де T — температура (у $^{\circ}\text{C}$), t — час (у хв). Знайдіть швидкість зміни температури через 10 хв. Оберіть відповідь, найближчу до правильної.

А	Б	В	Г	Д
-6°C/хв	-5°C/хв	-4°C/хв	-3°C/хв	-2°C/хв

IX. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ

- 1.** Знайдіть похідну функції $f(x) = 6\sqrt{x} - 8$. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = 4\sqrt{x^3} - 8x$	$f'(x) = 3\sqrt{x} - 8$	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$	$f'(x) = 3\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 8x$

[illegible]

- 2.** Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент $t = 10$ с. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
164 м/с ²	60 м/с ²	36 м/с ²	20 м/с ²	10 м/с ²

[illegible]

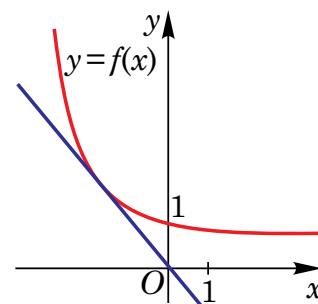
- 3.** Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$ у точці $x_0 = \frac{3\pi}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-4	-5	-8	-10

[illegible]

4. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.
(ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

[illegible]

- 5.** Знайдіть похідну функції $y = x^4 + 3 \cos x$. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y' = 4x^3 + 3\sin x$	$y' = 4x - 3\sin x$	$y' = 4x^3 - 3\sin x$	$y' = \frac{x^5}{5} + 3\sin x$	$y' = x^3 - 3\sin x$

[illegible]

- 6.** Функція $f(x)$ має в точці $x_0 = 5$ похідну $f'(x_0) = -1$. Обчисліть значення похідної функції $g(x) = f(x) \cdot x$ в точці x_0 , якщо $f(5) = 3$. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
$g'(5) = -2$	$g'(5) = -1$	$g'(5) = -5$	$g'(5) = 14$	$g'(5) = 15$

[illegible]

- 7.** Укажіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо $f(x) = 5$, $f'(x_0) = 2$. (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$y = 1 + 2(x - 5)$	$y = 5 + 2(x + 1)$	$y = 2 + 5(x - 1)$	$y = 2 + 5(x + 1)$	$y = 5 + 2(x - 1)$

[illegible]

- 8.** Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

A	Б	В	Г	Д
$f'(x) = -\frac{5}{(x+3)^2}$	$f'(x) = -\frac{7}{(x+3)^2}$	$f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$	$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$	$f'(x) = \frac{5}{x+3}$

[illegible]

9. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = x \sin x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Δ
0	-1	1	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

[illegible]

10. Обчисліть $f'(1)$, якщо $f(x) = x^2 e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$6e$	$5e$	$4e$	$3e$	e

11. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо $f(x) = \log_2 2x$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$	$(\ln 2; +\infty)$

12. Знайдіть суму коренів рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - 4x + 9$.

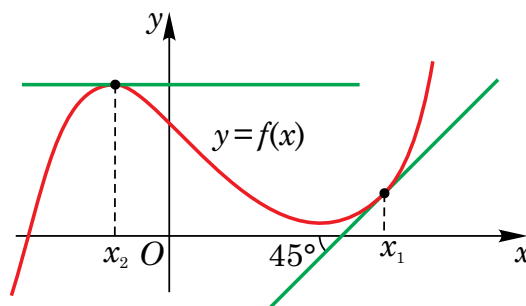
А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

13. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $B(-2; 5)$, паралельна осі абсцис. Знайдіть значення виразу $4f'(-2) + 3 \cdot f(-2)$.

А	Б	В	Г	Д
-6	5	15	35	знайти неможливо

14. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



- 15.** Обчисліть значення похідної функції $y = \frac{3^{2x}}{\ln 9}$ у точці $x_0 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{\ln 9}$	$\frac{9}{\ln 9}$	3	9	27

[illegible]

- 16.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та її похідною (А–Д).

Функція	Похідна функції	А Б В Г Д
1 $y = \frac{x}{3} + 5$	А $y' = \frac{1}{5}$	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $y = 3 - 5x$	Б $y' = 5$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $y = 3 + \frac{x}{5}$	В $y' = \frac{1}{3}$	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г $y' = -5$	
	Д $y' = 3$	

[illegible]

- 17.** Установіть відповідність між функцією (1–4) та рівнянням дотичної (А–Д), проведеної до графіка функції в заданій точці x_0 .

Функція	Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції в точці x_0	А Б В Г Д
1 $f(x) = x^3 - 27, x_0 = 2$	А $y = -4x + 4$	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $f(x) = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9$	Б $y = 2x + 1$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $f(x) = 2e^x - \cos x, x_0 = 0$	В $y = 12x - 45$	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г $y = 4x - 4$	
	Д $y = \frac{2}{3}x + 3$	

[illegible]

- 18.** Нехай α — кут між дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$ і додатним напрямом осі абсцис. Установіть відповідність між функцією (1–4) і значенням (А–Д) тангенса кута α .

<i>Функція</i>	<i>Значення тангенса кута α</i>	А Б В Г Д
1 $f(x) = 3 \sin x$	А 0	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $f(x) = x \cos x$	Б 1	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$	В 2	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г 3	
	Д 4	

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 15 rows of squares. The margins are uniform on all sides.

- 19.** Задано функцію $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$. Визначте кількість цілих значень параметра a , при яких корені рівняння $f(x) - af'(x) = 1 - a^2$ належать проміжку $(-2; 7)$.

[illegible]

Відповідь.

- 20.** Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 30, & x < -2, \\ 2x^4 + x, & x \geq -2. \end{cases}$ Обчисліть $f(-3) - f'(2)$. (НМТ, 2024 р.).

[illegible]

Відповідь.

- 21.** Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 3$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). Визначте момент часу t (у секундах), у який швидкість точки дорівнюватиме 9 м/с. (НМТ, 2023 р.).

[illegible]

Відповідь.

- 22.** Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, — паралельна прямій $y = 1,5x + 5$. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{18}{x} - f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. (НМТ, 2025 р.).

[illegible]

Відповідь.

Рефлексія

- | | | | | |
|-----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Чи пам'ятаю я похідні елементарних функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Чи можу я знаходити похідні елементарних функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Чи вмію я застосовувати правила суми, різниці, добутку та частки для знаходження похідних? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Чи впевнено я виконую обчислення похідних у кілька кроків? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Чи розумію я правило обчислення похідних складених функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Чи можу я знаходити похідні складених функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Чи я розумію, що таке дотична до графіка функції? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Чи я розумію геометричний зміст кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Чи я розумію, що похідна характеризує швидкість зміни фізичної величини? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Чи можу я навести приклади фізичних задач, де використовується похідна? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

