

Тема 3.

Повторення. Функції та їхні властивості

Урок 9. Похідна функції

План уроку

1. Похідні елементарних функцій.
2. Правила обчислення похідних.
3. Похідна складеної функції.
4. Геометричний зміст похідної функції.
5. Фізичний зміст похідної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, що можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–2];

добирає, фіксує інформацію з різних джерел [12 МАО 2.1.2–1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями, урахує емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2–1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2–2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого матеріалу з курсу алгебри.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

- 5) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами (або парами) важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 6) Пригадайте з учнями/ученицями вивчений матеріал із теми «Похідна функції» та запропонуйте учням/ученицям короткі теоретичні відомості.
- 7) Оскільки даний урок — урок підготовки до ЗНО/НМТ, то варто провести тестування з теми уроку, яке може мати формувальний або діагностичний характер.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до розв'язування вправ та аналізуйте типові помилки. Акцентируйте увагу учнів/учениць на актуальності даної теми в завданнях формату ЗНО/НМТ.
- 9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як можна визначити, наскільки швидко змінюється певна величина, наприклад, швидкість автомобіля в деякий момент часу?
- 2) Чи можна побудувати дотичну до графіка функції в заданій точці?
- 3) Чи можливо знайти швидкість руху матеріальної точки у певний момент часу за відомим рівнянням руху?
- 4) Чи важливо знати похідні елементарних функцій для того, щоб виконувати необхідні обчислення?
- 5) Чи можна визначити, як залежить температура повітря від висоти польоту літака?

II. Повторення (4–5 хв)

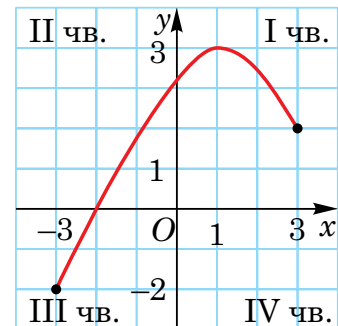
1. Скоротіть дробовий вираз $\frac{4b^2 + 20b}{25 + 10b + b^2}$. (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5+b}$	$4b$	$\frac{6}{25}$	$4b(5+b)$	$\frac{4b}{5+b}$

Відповідь. Д.

2. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. У яких чвертях розташований графік функції $y = f(x + 3)$? (НМТ, 2023 р.).

А	Б	В	Г	Д
лише в I та II	в усіх чвертях	лише в II та III	лише в I, II та III	лише в I та IV



Відповідь. В.

3. Визначте максимальну швидкість (у м/с) фантастичного зорельота, якщо вона становить 0,01 від швидкості світла у вакуумі. Уважайте, що швидкість світла у вакуумі дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
$3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 0,1^8$	$3 \cdot 10^{0,08}$	$3 \cdot 10^6$

Відповідь. Д.

4. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (НМТ, 2023 р.).

Початок речення

1 Функція $y = \log_{0,5} x$

2 Функція $y = \sin x$

3 Функція $y = \frac{1}{2x-2}$

Закінчення речення

А не визначена при $x = 1$.

Б набуває від'ємного значення при $x = 2$.

В є непарною.

Г має лише одну точку локального екстремуму.

Д зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Б, 2 – В, 3 – А.

5. Функція $y = f(x)$ є прямою пропорційністю на множині дійсних чисел. Знайдіть значення функції $g(x) = 3f(x) + \frac{|x|}{8}$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$, якщо графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(2; 7)$. (НМТ, 2025 р.).

Відповідь. $-20,75$.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Температура води змінюється за законом $T(t) = 60e^{-0,1t} + 20$, де T — температура (у $^{\circ}\text{C}$), t — час (у хв). Знайдіть швидкість зміни температури через 10 хв. Оберіть відповідь, найближчу до правильної.

А	Б	В	Г	Д
-6°C/хв	-5°C/хв	-4°C/хв	-3°C/хв	-2°C/хв

III. Похідні елементарних функцій (3 хв)

У таблиці подано формули обчислення похідних елементарних функцій.

Функція $f(x)$	Похідна функції $f'(x)$	Функція $f(x)$	Похідна функції $f'(x)$
k (число)	0	x	1
x^a	ax^{a-1}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

IV. Правила обчислення похідних (3 хв)

Якщо потрібно знаходити похідну не окремої функції, а їхньої суми, різниці, добутку або частки, то використовують правила обчислення похідних.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$, диференційовні у точці x_0 , причому $f(x_0) = f$, $g(x_0) = g$, $f'(x_0) = f'$, $g'(x_0) = g'$. Тоді:

- 1) $(f + g)' = f' + g'$ — похідна суми;
- 2) $(f - g)' = f' - g'$ — похідна різниці;
- 3) $(kf)' = kf'$, k — стале число;
- 4) $(fg)' = f'g + fg'$ — похідна добутку;
- 5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ — похідна частки.

V. Похідна складеної функції (2–3 хв)

Нехай треба обчислити значення функції $h(x) = \sqrt{4x+1}$ у точці $x_0 = 6$. Зазвичай, спочатку обчислюють значення виразу $4x + 1$ для $x_0 = 6$, тобто $4 \cdot 6 + 1 = 25$, а потім добувають арифметичний квадратний корінь, тобто $\sqrt{25} = 5$. Отже, $h(6) = 5$.

Якщо позначити $f(x) = 4x + 1$, а $g(f) = \sqrt{f}$, то $h(x) = g(f(x))$. У такому випадку кажуть, що $h(x)$ — складена функція, а $f(x)$ — її внутрішня функція.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $g(f(x))$ диференційовна в точці $f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна обчислюється за формулою:
 $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

VI. Геометричний зміст похідної функції (3–4 хв)

Теорема. Похідна функції в точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у цій точці, тобто тангенсу кута між додатним напрямом осі абсцис та цією дотичною.

Якщо $y = f(x)$ — задана функція, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між додатним напрямком осі абсцис та дотичною до графіка даної функції в точці $(x_0; f(x_0))$.

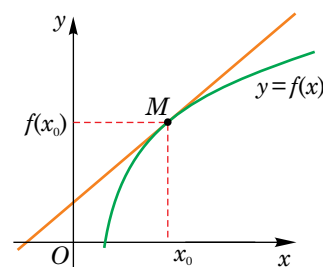
Якщо $f'(x_0) > 0$, то функція зростає, а якщо $f'(x_0) < 0$, то функція спадає.

Рівняння дотичної до графіка функції в деякій точці x_0

Означення. Дотичною до графіка функції, диференційовної в точці x_0 , називається пряма, яка проходить через точку $(x_0; f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $k = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



VII. Фізичний зміст похідної функції (3–4 хв)

За допомогою похідної функції можна визначати миттєву швидкість руху тіла та його прискорення в цей момент часу.

Якщо точка рухається по прямій за законом руху $x(t)$, то її миттєва швидкість обчислюється за формулою: $v(t) = x'(t)$.

Означення. Похідна від функції, що є похідною деякої функції $y = f(x)$, називається **другою похідною** функції $y = f(x)$. Позначення: $y'' = f''(x)$.

Означення. Швидкість зміни швидкості руху називають **прискоренням** руху тіла.

Якщо точка рухається по прямій зі швидкістю $v(t)$, то її прискорення обчислюється за формулою: $a(t) = v'(t)$.

Якщо точка рухається по прямій за законом руху $x(t)$, то її прискорення обчислюється за формулою: $a(t) = x''(t)$.

Ілюстративні приклади (10–12 хв)

6. Розв'яжіть нерівність $f'(x) + g'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = x^3 + x^2 - 24x$, $g(x) = 2x^2 + 18$. У відповідь запишіть кількість цілих розв'язків цієї нерівності.

Розв'язання. Знайдемо похідні заданих функцій: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 24$, $g'(x) = 4x$.

Тоді сума похідних: $f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 6x - 24$.

Складемо нерівність: $3x^2 + 6x - 24 \leq 0$ або $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

Звідси $x \in [-4; 2]$. Отже, розв'язками даної нерівності є сім цілих чисел.
Відповідь. 7.

7. Обчисліть значення похідної функції $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ у точці $x_0 = 4$.

Розв'язання. Оскільки похідна частки обчислюється за формулою $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

$$\text{то } y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}.$$

$$\text{Тоді } y'(4) = -\frac{1}{\sqrt{4}(\sqrt{4} - 1)^2} = -0,5.$$

Відповідь. $-0,5$.

- 8*. Складіть рівняння горизонтальної дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 :
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Оскільки дотична є горизонтальною, то $f'(x_0) = 0$.

$$\text{Таким чином: } (2^x - 7)'(2^x - 9) + (2^x - 7)(2^x - 9)' = 0, \quad 2^x \ln 2(2 \cdot 2^x - 16) = 0,$$

$$2^x \ln 2(2^{x+1} - 2^4) = 0, \quad 2^{x+1} - 2^4 = 0, \quad 2^{x+1} = 2^4, \quad x = 3.$$

Отже, абсциса точки дотику $x_0 = 3$ і рівняння дотичної $y = 0 \cdot (x - 3) + f(3)$, тобто $y = f(3)$.

$$\text{Знайдемо } y = f(3) = (2^3 - 7)(2^3 - 9) = -1.$$

Відповідь. $y = -1$.

- 9*. Матеріальна точка з масою 9 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$, де s — відстань (у метрах), t — час (в секундах). Знайдіть імпульс $p(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 5$ с, якщо $p(t) = m \cdot v(t)$. Відповідь запишіть у кг · м/с.

Розв'язання.

$$1) \text{ Оскільки } v(t) = s'(t), \text{ то } v(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 - 6t + 11}}(4t^2 - 6t + 11)' = \frac{4t - 3}{\sqrt{4t^2 - 6t + 11}}.$$

$$2) \text{ Тоді } v(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{\sqrt{4 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 11}} = \frac{17}{9} \text{ (м/с).}$$

$$3) \text{ Отже, } p(t) = 9 \cdot \frac{17}{9} = 17 \text{ (кг} \cdot \text{м/с).}$$

Відповідь. 17 кг · м/с.

VIII. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (4–5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Температура води змінюється за законом $T(t) = 60e^{-0,1t} + 20$, де T — температура (у $^{\circ}\text{C}$), t — час (у хв). Знайдіть швидкість зміни температури через 10 хв. Оберіть відповідь, найближчу до правильної.

А	Б	В	Г	Д
$-6\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$	$-5\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$	$-4\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$	$-3\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$	$-2\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$

Розв'язання. Оскільки похідна характеризує швидкість зміни функції, то швидкість зміни температури є похідною від функції $T(t)$. Тобто, $T'(t) = -6e^{-0,1t}$.

Якщо $t = 10$ хв, то $T'(10) = -6e^{-1} \approx -2\text{ }^{\circ}\text{C/хв}$.

Відповідь. Д.

IX. Тренувальні вправи для підготовки до ЗНО/НМТ

- 1.** Знайдіть похідну функції $f(x) = 6\sqrt{x} - 8$. (НМТ, 2024 р.).

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = 4\sqrt{x^3} - 8x$	$f'(x) = 3\sqrt{x} - 8$	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$	$f'(x) = 3\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 8x$

[illegible]

- 2.** Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, де s — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Визначте прискорення руху тіла в момент $t = 10$ с. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
164 м/с ²	60 м/с ²	36 м/с ²	20 м/с ²	10 м/с ²

[illegible]

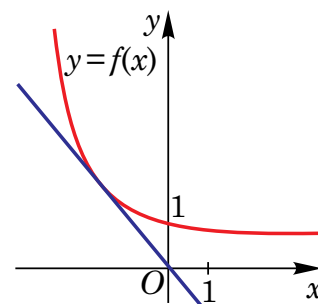
- 3.** Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$ у точці $x_0 = \frac{3\pi}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
-6	-4	-5	-8	-10

[illegible]

4. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.
(ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

[illegible]

10. Обчисліть $f'(1)$, якщо $f(x) = x^2 e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$6e$	$5e$	$4e$	$3e$	e

11. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо $f(x) = \log_2 2x$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$	$(\ln 2; +\infty)$

12. Знайдіть суму коренів рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - 4x + 9$.

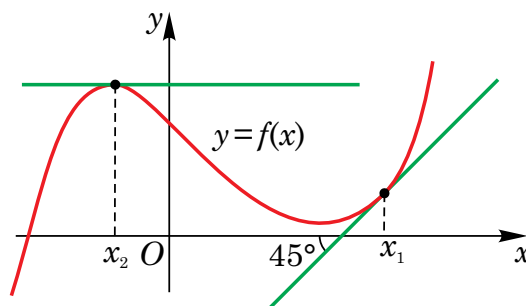
А	Б	В	Г	Д
-1	0	1	2	3

13. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $B(-2; 5)$, паралельна осі абсцис. Знайдіть значення виразу $4f'(-2) + 3 \cdot f(-2)$.

А	Б	В	Г	Д
-6	5	15	35	знайти неможливо

14. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$. (ЗНО, 2007 р.).

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



- 15.** Обчисліть значення похідної функції $y = \frac{3^{2x}}{\ln 9}$ у точці $x_0 = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{\ln 9}$	$\frac{9}{\ln 9}$	3	9	27

- 16.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та її похідною (А–Д).

Функція

1 $y = \frac{x}{3} + 5$

2 $y = 3 - 5x$

3 $y = 3 + \frac{x}{5}$

Похідна функції

А $y' = \frac{1}{5}$

Б $y' = 5$

В $y' = \frac{1}{3}$

Г $y' = -5$

Д $y' = 3$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

- 17.** Установіть відповідність між функцією (1–4) та рівнянням дотичної (А–Д), проведеної до графіка функції в заданій точці x_0 .

Функція

1 $f(x) = x^3 - 27, x_0 = 2$

2 $f(x) = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9$

3 $f(x) = 2e^x - \cos x, x_0 = 0$

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції в точці x_0

А $y = -4x + 4$

Б $y = 2x + 1$

В $y = 12x - 45$

Г $y = 4x - 4$

Д $y = \frac{2}{3}x + 3$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

- 18.** Нехай α — кут між дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$ і додатним напрямом осі абсцис. Установіть відповідність між функцією (1–4) і значенням (А–Д) тангенса кута α .

<i>Функція</i>	<i>Значення тангенса кута α</i>	А Б В Г Д
1 $f(x) = 3 \sin x$	А 0	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $f(x) = x \cos x$	Б 1	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$	В 2	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
	Г 3	
	Д 4	

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 15 rows of squares. The margins are uniform on all sides.

- 19.** Задано функцію $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$. Визначте кількість цілих значень параметра a , при яких корені рівняння $f(x) - af'(x) = 1 - a^2$ належать проміжку $(-2; 7)$.

[illegible]

Відповідь.

- 20.** Задано функцію $f(x) = \begin{cases} 30, & x < -2, \\ 2x^4 + x, & x \geq -2. \end{cases}$ Обчисліть $f(-3) - f'(2)$. (НМТ, 2024 р.).

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, creating a total of 300 square units. The lines are thin and dark gray, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

Відповідь.

- 21.** Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 3$, де $x(t)$ — координата точки (у метрах), t — час (у секундах). Визначте момент часу t (у секундах), у який швидкість точки дорівнюватиме 9 м/с. (НМТ, 2023 р.).

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small squares formed by thin, light blue lines. There are 20 columns and 15 rows of squares. The margins are uniform on all sides.

Відповідь.

- 22.** Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$, — паралельна прямій $y = 1,5x + 5$. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \frac{18}{x} - f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. (НМТ, 2025 р.).

[illegible]

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

- 1.** В.
- 2.** В.
- 3.** Г.
- 4.** Б.
- 5.** В.
- 6.** А.
- 7.** Д.
- 8.** В.
- 9.** В.
- 10.** Г.
- 11.** Б.
- 12.** В.
- 13.** В.
- 14.** А.
- 15.** Г.
- 16.** 1 – В, 2 – Г, 3 – А.
- 17.** 1 – В, 2 – Д, 3 – Б.
- 18.** 1 – Г, 2 – Б, 3 – А.
- 19.** 6.
- 20.** –35.
- 21.** 4.
- 22.** –3,5.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Бали	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

№ завдання	16	17	18	19	20	21	22	Сума
Бали	3	3	3	2	2	2	2	32

Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{32} = 0,375$.

2) Коефіцієнт оцінювання 0,375 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку. Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 24 тестові бали за результатами тестування. Тоді, оцінка: $24 \cdot 0,375 = 9$ (балів).

Х. Рефлексія (2 хв)

- | | | | | |
|-----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Чи пам'ятаю я похідні елементарних функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Чи можу я знаходити похідні елементарних функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Чи вмію я застосовувати правила суми, різниці, добутку та частки для знаходження похідних? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Чи впевнено я виконую обчислення похідних у кілька кроків? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Чи розумію я правило обчислення похідних складених функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Чи можу я знаходити похідні складених функцій? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Чи я розумію, що таке дотична до графіка функції? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Чи я розумію геометричний зміст кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Чи я розумію, що похідна характеризує швидкість зміни фізичної величини? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Чи можу я навести приклади фізичних задач, де використовується похідна? | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Список використаної літератури

- 1) Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіль. рівень): підручн. для 10-го кл. закл. заг. середн. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018.
- 2) Ключко І. Я. Математика. Алгебра ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.І. / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2024.
- 3) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Ч. II. Алгебра і початки аналізу (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021.
- 4) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.

5) Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х.: Гімназія, 2019.