

Урок 1–2. Елементарні функції та їхні графіки**План уроку**

1. Елементарні функції та їхні графіки.
2. Побудова графіків функцій:
 - перетворенням формули, що задає функцію;
 - геометричними перетвореннями графіка даної функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 MAO 1.2.1–1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 MAO 2.1.3–2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі та шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 MAO 3.2.1–1];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів та послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 MAO 4.2.1–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) На ваш розсуд, запропонуйте учням/ученицям виконати діагностичну роботу або на початку уроку з пропедевтичною метою, або наприкінці уроку для закріплення. Вдосконалюйте навички самооцінювання або взаємооцінювання учнів/учениць під час самоперевірки чи взаємоперевірки діагностичної роботи.
- 4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 6) Обирайте матеріал із запропонованого на ваш розсуд, акцентуйте увагу на прикладних задачах.
- 7) Для побудови графіків функцій використовуйте не лише традиційний підхід, а й можливості графічних калькуляторів Geogebra, Desmos.
- 8) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 9) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1. Якою функцією можна задати співвідношення між витратами пального та швидкістю руху автомобіля?
2. Чи має хвилеподібну форму графік зміни температури тіла людини впродовж доби?
3. Яку форму може мати графік залежності часу дії ліків від їхньої дози у медицині?
4. Яка функція може описати зміну гучності, якщо на концерті звук поступово то стихає, то гучнішає?
5. Як виглядає графік залежності атмосферного тиску від висоти, якщо під час підйому в гори тиск повітря зменшується?
6. Який графік відображає динаміку зростання кількості грошей на депозиті завдяки відсоткам?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Визначте знак виразу $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{ctg} 3$.
Відповідь. Додатний.
2. Обчисліть: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$.
Відповідь. $3 - \sqrt{3}$.
3. Обчисліть координати точки перетину графіків функцій $y = \sqrt{2x+7}$ і $y = \sqrt{x+4}$.
Відповідь. $(-3; 1)$.

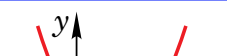
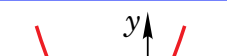
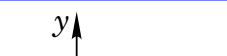
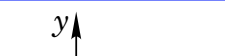
5. Які з наведених тверджень є правильними?

- 1) Графіком функції $y = \frac{2x-1}{2x-1}$ є гіпербола.
- 2) Графік функції $y = 3x - 9$ перетинає вісь Ox у точці $(3; 0)$.
- 3) Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є парабола.
- 4) Щоб побудувати графік функції $y = (x-4)^5$, потрібно графік функції $y = x^5$ перенести ліворуч по осі Ox на дві одиниці.
- 5) Точка $(8; 4)$ належить графіку функції $y = x^{\frac{2}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
1), 2), 3)	1), 3), 5)	1), 2), 4), 5)	2), 4)	2), 5)

[illegible]

6. На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції $y = 4 - (x - 1)^2$?
(ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
				

7. Скільки коренів має рівняння $-2|x| = x^2 - 4$?

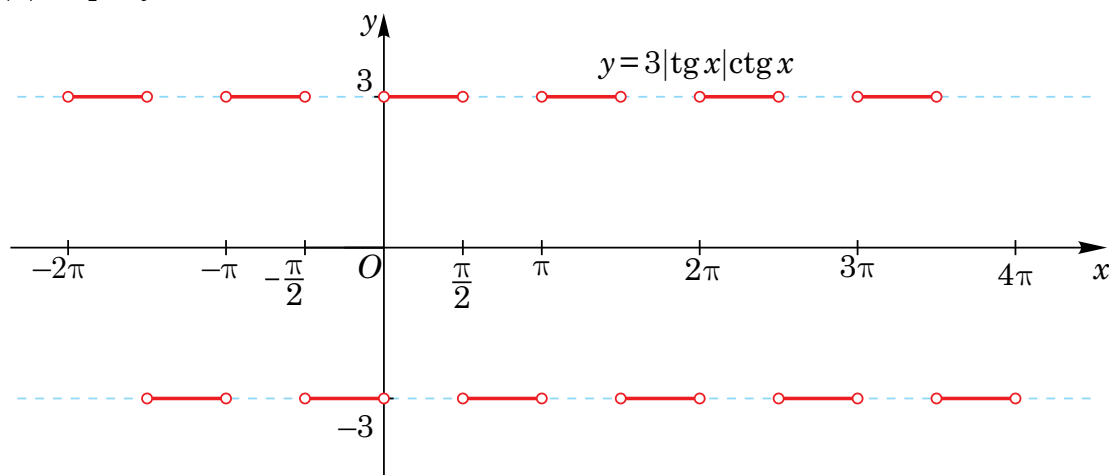
А	Б	В	Г	Д
один	два	три	четыре	пяти

[illegible]

8. На якому з рисунків зображено фрагмент графіка функції $y = \cos(x + 2\pi)$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$? (ЗНО, додаткова сесія, 2014 р.).

A	Б	В	Г	Д

3. Г.
4. Б.
5. Д.
6. Д.
7. Б.
8. Б.
9. Функція 3), $T = 2$.
10. $a = 1,5$.
11. Безліч.
12. Див. рисунок.



Як я вирішую певну проблему?

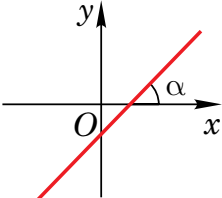
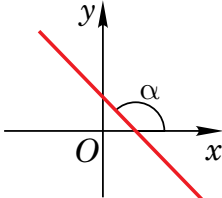
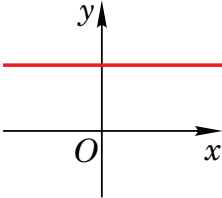
Задача. На уроці фізики учні й учениці досліджують, як змінюється тиск, з яким тисне людина з масою 60 кг на поверхню, якщо площа опори змінюється при незмінній силі (сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла). Тиск визначається за формулою $P = \frac{F}{S}$, де P — тиск (у Па), F — сила (у Н), S — площа опори (у м²). На скільки зміниться тиск, з яким тисне людина на підлогу, коли вона змінює положення стоячи на положення лежачи? Зробіть висновок.

IV. Елементарні функції та їхні графіки

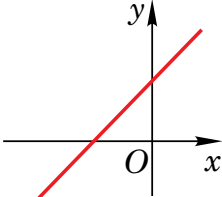
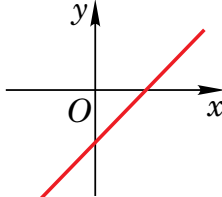
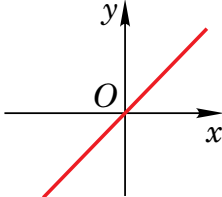
1. Лінійна функція. Пряма пропорційність

Означення. *Лінійною* називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа. Графіком лінійної функції є пряма.

Число k — **кутовий коефіцієнт**. Оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між прямою та додатним напрямком осі абсцис, то від кута α залежить значення кутового коефіцієнта.

1. Якщо $k > 0$, то кут α , між прямою та додатним напрямком осі абсцис — гострий. Функція зростаюча.	2. Якщо $k < 0$, то кут α , між прямою та додатним напрямком осі абсцис — тупий. Функція спадна.	3. Якщо $k = 0$, то кут $\alpha = 0$. Функція константа. Графік функції паралельний осі абсцис.
		

Число b — ордината точки перетину графіка функції з віссю ординат.

1. Якщо $b > 0$, то точка перетину прямої з віссю ординат лежить вище осі абсцис.	2. Якщо $b < 0$, то точка перетину прямої з віссю ординат лежить нижче осі абсцис.	3. Якщо $b = 0$, то графік функції проходить через початок координат. Таку функцію $y = kx$ називають прямою пропорційністю.
		

Ілюстративні приклади

- 6.** Підприємець виготовляє блокноти. Фіксовані витрати становлять 1000 грн, а змінні витрати на один блокнот становлять 20 грн. За лінійною функцією, яка описує загальні витрати залежно від кількості блокнотів, визначте, при якій кількості блокнотів витрати не перевищують 3000 грн.

Розв'язання. Запишемо функцію, що описує загальні витрати залежно від x — кількості блокнотів: $y = 20x + 1000$. Оскільки витрати не перевищують 3000 грн, то $20x + 1000 \leq 3000$, звідси $x \leq 100$.

Відповідь. Не більше 100 блокнотів.

- 7*.** Знайдіть синус кута нахилу прямої $y = -2x + 1$ з додатним напрямком осі абсцис.

Розв'язання. Загальний вигляд лінійної функції $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Оскільки $y = -2x + 1$, де $k = \operatorname{tg} \alpha = -2$, то $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$.

Використаємо тригонометричну тотожність $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Звідси $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

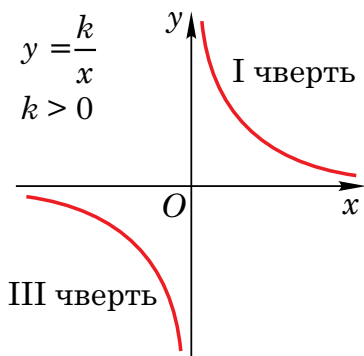
Відповідь. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. Обернена пропорційність

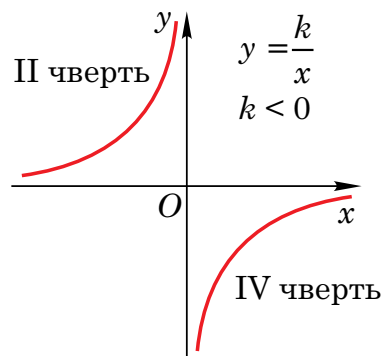
Означення. Дві величини називають обернено пропорційними, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї з них у кілька разів, інша зменшується (збільшується) у стільки ж разів.

Обернену пропорційність задають формулою $y = \frac{k}{x}$, де y і x — змінні величини, а k — число або коефіцієнт. Графіком оберненої пропорційності є гіпербола.

Якщо $k > 0$, то гіпербола розташована в першій і третій координатних чвертях.



Якщо $k < 0$, то гіпербола розташована в другій і четвертій координатних чвертях.



	Властивості функції	Функція $y = \frac{k}{x}$	
		$k > 0$	$k < 0$
1.	Область визначення функції	$D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
2.	Нулі функції	Немає.	
3.	Область значень функції	$E(y): y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.	
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції	Функція спадає при $x \in (-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.	Функція зростає при $x \in (-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції	Непарна.	

Ілюстративні приклади

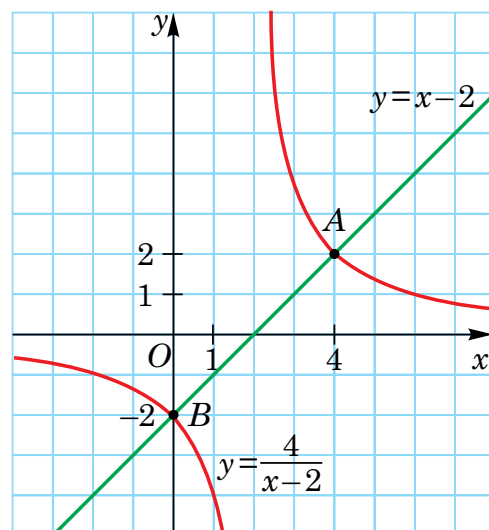
8. Розв'яжіть графічно рівняння: $\frac{4}{x-2} = x-2$.

Розв'язання. У рівнянні $\frac{4}{x-2} = x-2$ має виконуватись умова $x \neq 2$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \frac{4}{x-2}$ та $y = x-2$ (див. рисунок).

Точки $A(4; 2)$ і $B(0; -2)$ — точки перетину графіків функцій. Абсиси точок перетину — корені рівняння.

Відповідь. 0; 4.



9. На рисунку зображено графік функції $y = \frac{m}{x-n}$. Знайдіть значення параметрів m і n . У відповідь запишіть їхній добуток.

Розв'язання. Урахуємо, що знаменник дробу $x - n \neq 0$, звідси $x \neq n$.

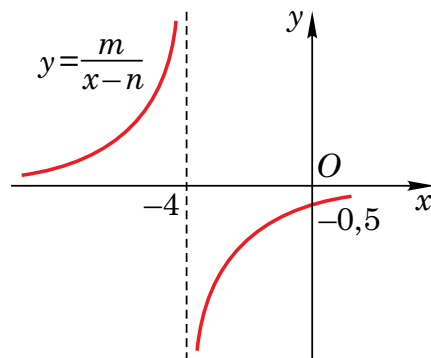
Вертикальна асимптота $x = -4$, тому $n = -4$.

Графік функції перетинає вісь ординат в точці $(0; -0,5)$, координати якої задовольняють формулу:

$$-0,5 = \frac{m}{0 + 4}, \text{ звідки } m = -2.$$

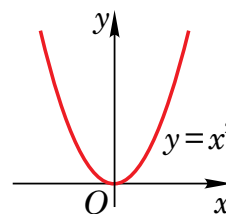
Тоді $m \cdot n = -2 \cdot (-4) = 8$.

Відповідь. 8.



3. Квадратична функція

Означення. Функцію виду $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, називають **квадратичною** функцією. Графіком квадратичної функції є парабола, розташування якої на координатній площині залежить від коефіцієнтів a і b та числа c .



Якщо $a = 1$, $b = 0$ і $c = 0$, то графік має вигляд (див. рисунок).

	Властивості функції	Функція $y = x^2$
1.	Область визначення функції	$D(y): x \in \mathbb{R}$.
2.	Нулі функції	$x = 0$.
3.	Область значень функції	$E(y): y \in [0; +\infty)$.
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції	Функція зростає при $x \in [0; +\infty)$. Функція спадає при $x \in (-\infty; 0]$.
6.	Парність/непарність функції	Парна.

Ілюстративні приклади

10. Із установки для запуску феєрверків запускають вгору ракету. Її висота над землею після запуску описується формулою $h(t) = -2t^2 + 20t + 100$, де $h(t)$ — висота (у метрах), t — час (у секундах) від моменту запуску. Через скільки секунд ракета досягне максимальної висоти і якою буде ця висота?

Розв'язання.

І спосіб. Графіком функції $h(t) = -2t^2 + 20t + 100$ є парабола, вітки якої спрямовані вниз, тому найбільшого значення функція набуває у вершині параболи. Знайдемо координати вершини параболи:

$$t_0 = -\frac{b}{2a}, \quad t_0 = -\frac{20}{2 \cdot (-2)} = 5, \quad h(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 + 100 = 150 \text{ (м)}.$$

II спосіб. Знайдемо похідну функції: $h'(t) = (-2t^2 + 20t + 100)' = -4t + 20$.

Знайдемо критичну точку функції: $h'(t) = 0$, $-4t + 20 = 0$, звідси $t = 5$ — точка максимуму функції.

Тоді $h(5) = 150$ (м) — ордината точки максимуму функції.

Відповідь. 5 секунд; 150 метрів.

- 11.** Після удару футболіста по м'ячу висота м'яча над поверхнею футбольного поля змінюється за законом $h(t) = -1,5t^2 + 12t + 1,5$, де $h(t)$ — висота м'яча (в метрах) через t секунд після удару. Впродовж якого часу м'яч перебуватиме на висоті не меншій від 24 м?

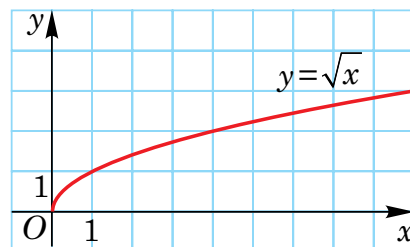
Розв'язання. Визначимо час, коли м'яч, який рухається за законом $h(t) = -1,5t^2 + 12t + 1,5$, буде перебувати на висоті 24 м над землею:

$$-1,5t^2 + 12t + 1,5 = 24, -1,5t^2 + 12t - 22,5 = 0, t^2 - 8t + 15 = 0, t_1 = 3, t_2 = 5.$$

Відповідь. З третьої по п'яту секунду.

4. Функція $y = \sqrt{x}$

Зі зміною площі квадрата відповідно змінюється довжина його сторони, при цьому кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , а тому формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію. Графік цієї функції називають *віткою параболи*.



	Властивості функції	Функція $y = \sqrt{x}$
1.	Область визначення функції	$D(y): x \in [0; +\infty)$.
2.	Нулі функції	$x = 0$.
3.	Область значень функції	$E(y): y \in [0; +\infty)$.
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції	Функція зростає при $x \in [0; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції	Ні парна, ні непарна.

Ілюстративні приклади

- 12.** Під час презентації в кабінеті фізики світловий потік від проектора падає на екран. Освітленість поверхні екрана E (у люксах) залежить від відстані d (у метрах) між джерелом світла й екраном за формулою $E = \frac{100}{\sqrt{d}}$. На якій відстані від проектора освітленість екрану буде 50 лк?

Розв'язання. Оскільки $E = \frac{100}{\sqrt{d}}$ і $E = 50$ лк, то $\frac{100}{\sqrt{d}} = 50$, $\sqrt{d} = 2$. Отже, $d = 4$ (м).

Відповідь. 4 метри.

- 13.** Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} + 2 = (x + 1)^2 - 1$.

Розв'язання.

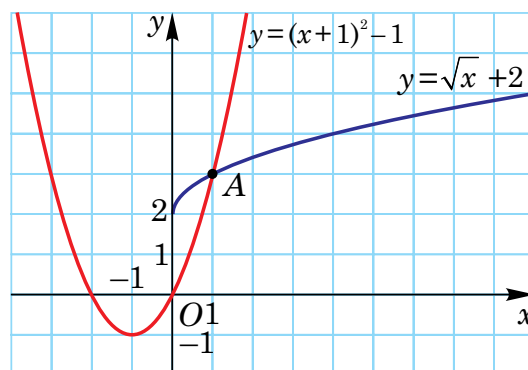
У рівнянні $\sqrt{x} + 2 = (x + 1)^2 - 1$ виконується умова $x \geq 0$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = (x + 1)^2 - 1$

(див. рисунок).

Оскільки $A(1; 3)$ — точка перетину графіків, то $x = 1$.

Відповідь. 1.

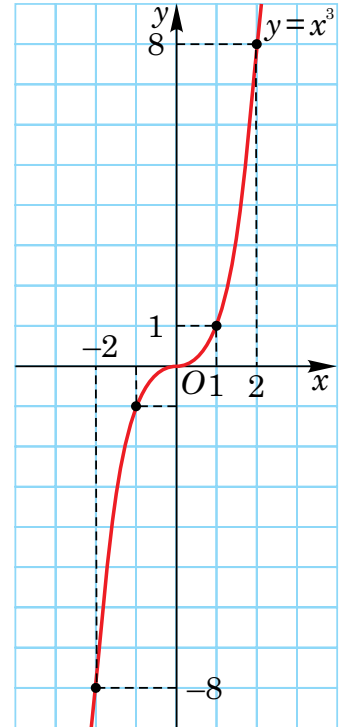


5. Функція $y = x^3$

Означення. Функцію виду $y = x^3$ називають **кубічною**.

Графік цієї функції — кубічна парабола.

	Властивості функції	Функція $y = x^3$
1.	Область визначення функції	$D(y): x \in R.$
2.	Нулі функції	$x = 0.$
3.	Область значень функції	$E(y): y \in R.$
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty).$
5.	Проміжки монотонності функції	Функція зростає при $x \in R.$
6.	Парність/непарність функції	Непарна.

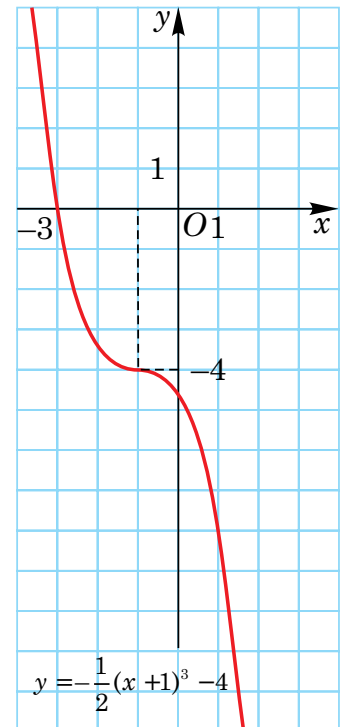


Ілюстративні приклади

14. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}((x+1)^3 + 8)$.

Розв'язання. Оскільки $-\frac{1}{2}((x+1)^3 + 8) = -\frac{1}{2}(x+1)^3 - 4$,

то побудуємо графік функції $y = -\frac{1}{2}(x+1)^3 - 4$.



15. Розв'яжіть графічно рівняння: $-4 + 2(x - 1)^3 + |x| = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$2(x - 1)^3 = -|x| + 4.$$

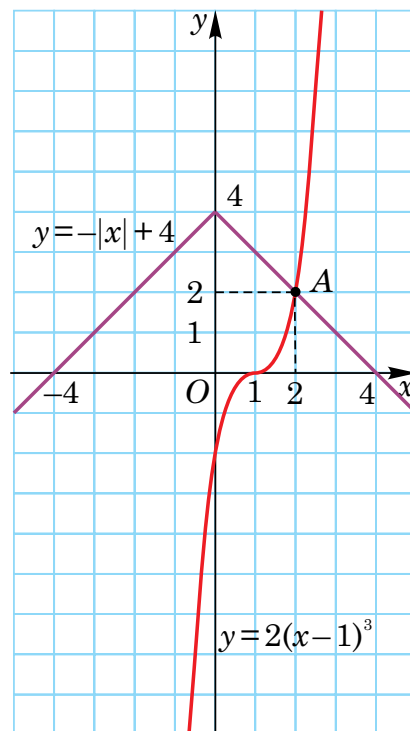
Ліва та права частини рівняння є функціями

$$y(x) = 2(x - 1)^3 \text{ і } g(x) = -|x| + 4.$$

Побудуємо їхні графіки в одній системі координат.

Точка $A(2; 2)$ — точка перетину графіків, тому $x = 2$ — корінь рівняння.

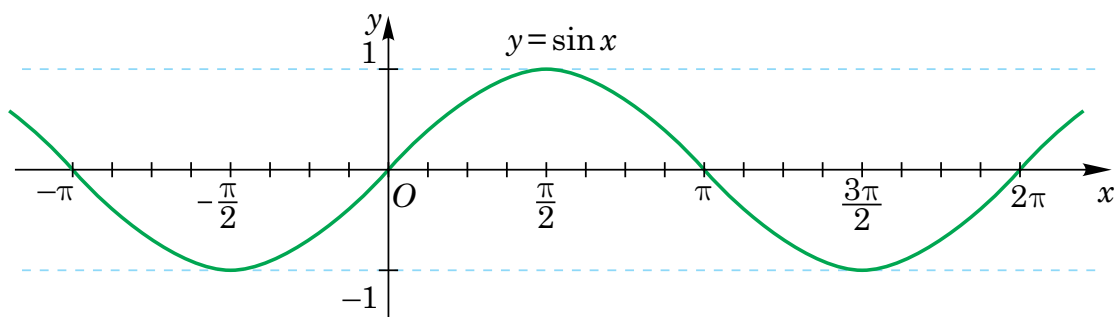
Відповідь. 2.



6. Тригонометричні функції

Функція $y = \sin x$

Графік функції — синусоїда (див. рисунок).

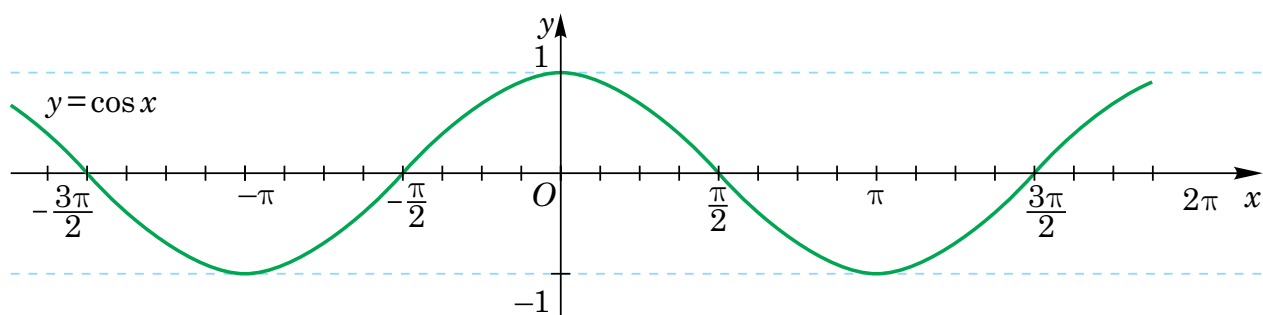


Властивості функції	Функція $y = \sin x$
Область визначення	$D(y) = \mathbb{R}$.
Область значень	$E(y): y \in [-1; 1]$.
Найбільше значення функції	Найбільше значення дорівнює 1 і досягається в точках, що відповідають кутам виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції дорівнює -1 і досягається в точках, що відповідають кутам виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність/непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична із головним періодом $T = 2\pi$.

Властивості функції	Функція $y = \sin x$
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функції	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$. $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Функція $y = \cos x$

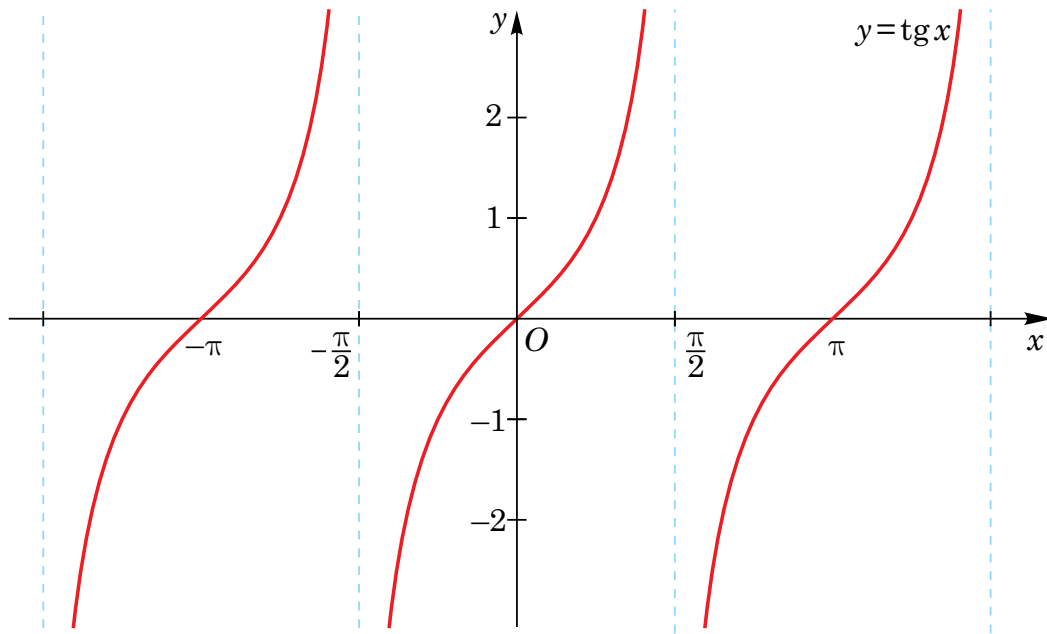
Графік функції — косинусоїда (див. рисунок).



Властивості функції	Функція $y = \cos x$
Область визначення	$D(y) = \mathbb{R}$.
Область значень	$E(y): y \in [-1; 1]$.
Найбільше значення функції	Найбільше значення дорівнює 1 і досягається в точках, що відповідають кутам виду $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Найменше значення функції	Найменше значення функції дорівнює -1 і досягається в точках, що відповідають кутам виду $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Нулі функції	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Парність/непарність функції	Функція парна. Графік функції симетричний відносно осі ординат.
Періодичність функції	Функція періодична із головним періодом $T = 2\pi$.
Проміжки монотонності функції	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.
Проміжки знакосталості функції	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$. $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$

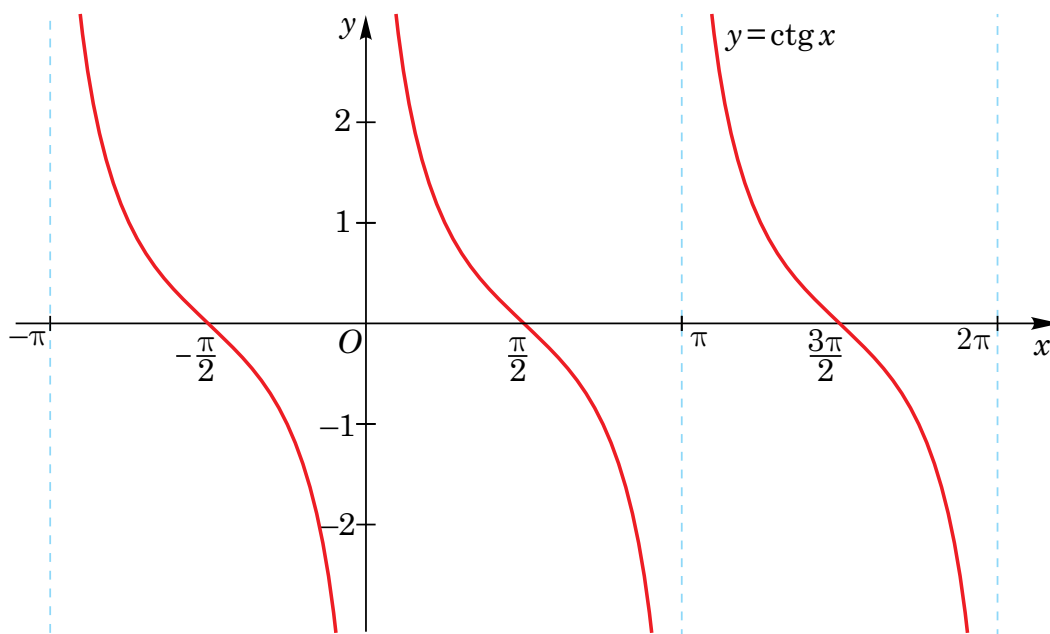
Графік функції — тангенсоїда (див. рисунок).



Властивості функції	Функція $y = \operatorname{tg} x$
Область визначення	$D(y) : x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$
Область значень	$E(y) : y \in \mathbb{R}.$
Найбільше, найменше значення функції	Найбільшого й найменшого значень функція не має.
Нулі функції	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
Парність/непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом $T = \pi.$
Проміжки монотонності функції	Зростає на всій області визначення.
Проміжки знакосталості функції	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Функції $y = \operatorname{ctg} x$

Графік функції — котангенсоїда (див. рисунок).



Властивості функції	Функція $y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	$D(y): x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
Область значень	$E(y): y \in \mathbb{R}$.
Найбільше, найменше значення функції	Найбільшого і найменшого значень функція не має.
Нулі функції	$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
Парність/непарність функції	Функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.
Періодичність функції	Функція періодична з головним періодом $T = \pi$.
Проміжки монотонності функції	Спадає на всій області визначення.
Проміжки знакосталості функції	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Ілюстративні приклади

16. Знайдіть множину значень функції $y = 2\cos 3x - 5$.

Розв'язання. Оскільки $E(\cos x) = [-1; 1]$, тобто $-1 \leq \cos 3x \leq 1$, то $-2 \leq 2\cos 3x \leq 2$.

Звідси $-2 - 5 \leq 2\cos 3x - 5 \leq 2 - 5$, а тому $-7 \leq 2\cos 3x - 5 \leq -3$, $-7 \leq y \leq -3$.

Відповідь. $y \in [-7; -3]$.

17*. Знайдіть нулі функції $y = \sin 4x + \cos 8x - 1$.

Розв'язання. Нулями функції є корені рівняння $\sin 4x + \cos 8x - 1 = 0$.

Запишемо рівняння у вигляді $\sin 4x - (1 - \cos 8x) = 0$ і використаємо формулу

пониження степеня $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$.

Тоді $\sin 4x - 2\sin^2 4x = 0$.

Розкладемо на множники ліву частину рівняння:

$\sin 4x (2\sin 4x - 1) = 0$, $\sin 4x = 0$ або $\sin 4x = 0,5$.

Звідси $x = \frac{\pi n}{4}$ або $x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{4}$ або $x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$.

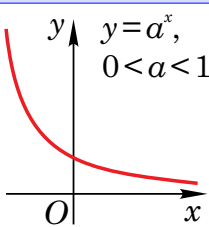
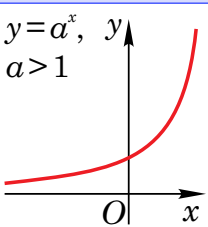
7. Показникова функція

Означення. Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається **показниковою**.

Чому a не може бути менше 0 або дорівнювати 0, або дорівнювати 1?

Якщо $a = 0$, $x \leq 0$, то вираз a^x невизначений, наприклад: 0^0 , 0^{-2} .

Якщо $a < 0$ і x — нескоротний дріб, знаменник якого парний, то вираз a^x невизначений. Наприклад, вирази $(-3)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-3)^5}$ та $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3}$ не є дійсними числами.

	Властивості функції	Функція $y = a^x$, $0 < a < 1$	Функція $y = a^x$, $a > 1$
			
1.	Область визначення функції	$D(y) = R$.	
2.	Нулі функції	Нулів функція не має, графік функції не перетинає вісь Ox .	
3.	Область значень функції	$E(y): y \in (0; +\infty)$.	
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) > 0$ при $x \in R$, функція набуває лише додатних значень на всій області визначення.	
5.	Проміжки монотонності функції	Функція спадна.	Функція зростаюча.
6.	Парність/непарність функції	Ні парна, ні непарна.	
7.	Найбільше, найменше значення	Не існує.	

Ілюстративні приклади

- 18.** Знайдіть множину значень функції $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} - 2$.

Розв'язання. Множина значень функції $y = a^x$, $y \in (0; +\infty)$.

Оскільки число 2 зменшує усі значення функції $y = a^x$ на 2, то множина значень функції $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} - 2$ становить $y \in (-2; +\infty)$.

Відповідь. $y \in (-2; +\infty)$.

- 19.** Побудуйте графік функції $y = -4^x + 3$. Укажіть множину значень функції.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = 4^x$.

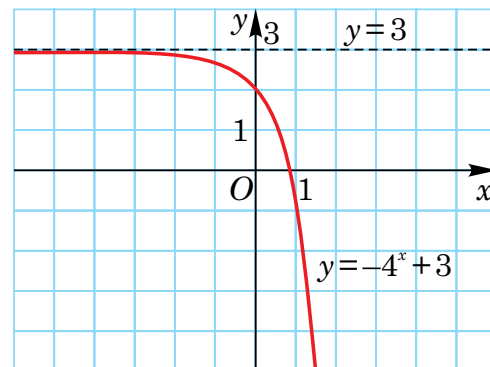
Симетрично відобразимо побудований графік відносно осі Ox : $y = -4^x$.

Виконаємо паралельне перенесення графіка функції $y = -4^x$ на 3 одиниці вгору:

$y = -4^x + 3$ (див. рисунок).

$E(y)$: $y \in (-\infty; 3)$.

Відповідь. $y \in (-\infty; 3)$.



V. Побудова графіків функцій

Перетворенням формули, що задає функцію

Для побудови графіка за формулою, що задає функцію, потрібно:

- знайти область визначення функції;
- знайти характерні точки, а саме: нулі функції, перетин з віссю ординат, максимумами або мінімумами;
- провести плавну криву лінію через знайдені точки з урахуванням властивостей функції.

Геометричними перетвореннями графіка функції

Для побудови графіка функції геометричними перетвореннями використовуємо відомий «базовий» графік функції, наприклад, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$ і застосовуємо до нього геометричні перетворення.

Ілюстративні приклади

- 20.** Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x + 3$.

Розв'язання.

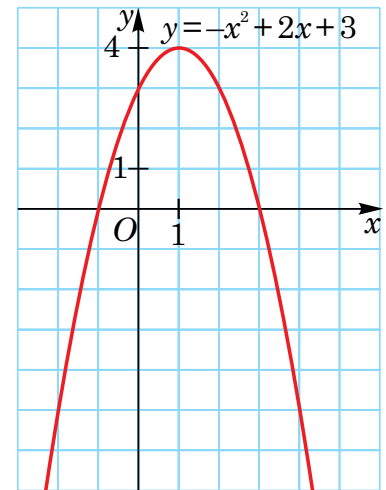
І спосіб. Графіком квадратичної функції $y = -x^2 + 2x + 3$ є парабола, вітки якої спрямовані вниз. Знайдемо координати вершини параболи. Оскільки $x_0 = -\frac{b}{2a}$,

то $x_0 = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$, $y_0 = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$. Тоді точка (1; 4) — вершина параболи.

II спосіб. Виділимо квадрат двочлена з квадратного тричлена:

$-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 4 = -(x - 1)^2 + 4$.
Графік функції $y = -(x - 1)^2 + 4$ побудуємо за допомогою послідовних геометричних перетворень графіка функції $y = x^2$:

- симетрія відносно осі Ox ,
- паралельне перенесення на 1 одиницю праворуч уздовж осі Ox ;
- паралельне перенесення на 4 одиниці вгору вздовж осі Oy .



21. Побудуйте графік функції $y = 2|x + 1| - 3$.

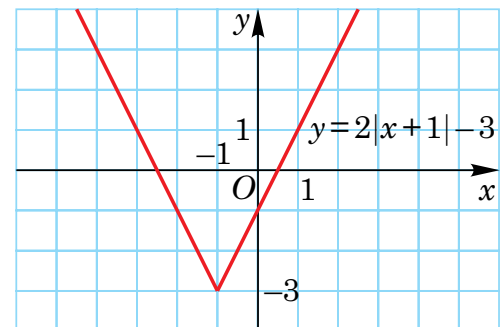
Розв'язання.

Якщо $x < -1$, то $2|x + 1| - 3 = -2(x + 1) - 3 = -2x - 5$.

Якщо $x \geq -1$, то $2|x + 1| - 3 = 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$.

Графіком функції $y = \begin{cases} -2x - 5, & x < -1, \\ 2x - 1, & x \geq -1 \end{cases}$ є два про-

мені зі спільним початком у точці $(-1; -3)$ (див. рисунок).



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На уроці фізики учні й учениці досліджують, як змінюється тиск, з яким тисне людина з масою 60 кг на поверхню, якщо площа опори змінюється при незмінній силі (сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла). Тиск визначається за формулою

$P = \frac{F}{S}$, де P — тиск (у Па), F — сила (у Н), S — площа опори (у м²). На скільки

зміниться тиск, з яким тисне людина на підлогу, коли вона змінює положення стоячи на положення лежачи? Зробіть висновок.

Розв'язання. Для розв'язання задачі потрібні дані, яких не вистачає в її умові. Дізнатися площу тіла людини можна зі статті у Вікіпедії (перейти за QR-кодом). Площу ступні ноги не важко орієнтовно розрахувати, зробивши відповідні виміри.

Наприклад, ступня, довжиною 25 см і шириною приблизно 8 см, має площу $S_{\text{ст.}} = 0,25 \cdot 0,08 = 0,02$ (м²), а площа двох ступень становить 0,04 м².

Як зазначено у згаданій статті з Вікіпедії, площа тіла людини становить приблизно 1,8 м².

Оскільки сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла, то $F = mg$, $F = 60 \cdot 10 = 600$ (Н).

Обчислимо тиск на поверхню, який чинить людина стоячи:

$$P_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{600}{0,04} = 15000 \text{ (Па)}.$$



Обчислимо тиск на поверхню, який чинить людина, якщо лежить:

$$P_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{600}{1,8} \approx 333 \text{ (Па)}.$$

Зміна тиску становить $15000 - 333 = 14667 \text{ (Па)}$.

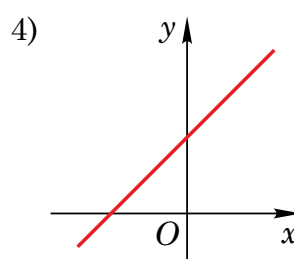
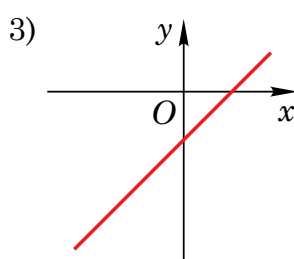
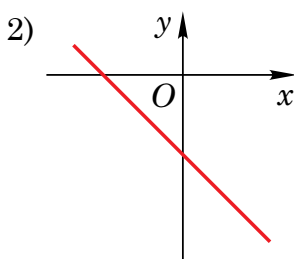
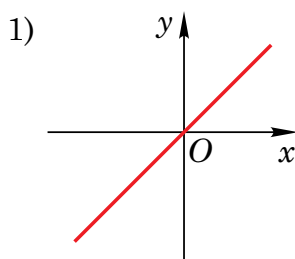
Отже, площа опори і тиск обернено пропорційні. Чим більша площа опори, тим менший тиск.

Відповідь. Зменшиться приблизно на 14667 Па.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. На якому з рисунків 1) – 4) для лінійних функцій виконується умова $k > 0$, $b < 0$?



А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	такого рисунка немає

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2(x - 3) + 1$;

2) $y = (x - 1)^3 + 1$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = -(x + 1)^2 - 2$;

2) $y = -|x| + 4$.

4. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Початок речення

Закінчення речення

1 Графік функції

А не перетинає вісь y .

$y = 5 - x$

Б не має спільних точок із графіком функції $y = x^2 - 5$.

2 Графік функції

$y = 2x + 3$

В утворює з додатним напрямом осі x тупий кут.

3 Графік рівняння

$2x + 6 = 0$

Г паралельний прямій $y - x = 0$.

4 Графік функції

$y = x - 4$

Д перетинає коло, задане рівнянням $x^2 + y^2 = 4$.

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

5. Попит на товар описується функцією $Q(p) = \frac{500}{p}$, де Q — кількість одиниць товару, купленого по p грн за одиницю.

1) Побудуйте графік функції.

2) Знайдіть кількість одиниць товару, який куплять по ціні 25 грн.

3) Якою повинна бути ціна, щоби продати 50 одиниць товару?

6. Знайдіть найменший додатний період функції $f(x) = 9 - 6\cos(20\pi x + 7)$. (ЗНО, 2013 р.).
7. Графік лінійної функції $y = kx + b$ проходить через точки $(-4; 0)$ і $(0; 11)$. Знайдіть k .
8. Визначте ординату точки перетину графіків функцій $y = 18 - 2x$ і $y = 3x - 13$.
9. Установіть графічно кількість коренів рівняння $-x^2 = \sqrt{x}$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = \frac{5}{x+1} - 3$; 2) $y = 3 \cdot 2^{-(x+1)}$; 3) $y = |x^2 - 4|$.
2. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$; 2) $y = -\frac{1}{2}|x - 4| + 3$.
3. Кількість бактерій у культурі змінюється за законом $N(t) = 100 \cdot 2^t$, де N — кількість бактерій (у шт.), t — час (у год).
- 1) Побудуйте графік функції.
- 2) Визначте кількість бактерій через 3 години.
- 3) Через скільки годин кількість бактерій перевищить 5000 шт.?
4. Арка мосту має форму параболи, яка задається рівнянням $y = 9 - 0,25x^2$, де x — відстань (у м) від середини моста, y — висота (у м).
- 1) Побудуйте графік функції.
- 2) Визначте максимальну висоту арки мосту.
- 3) Знайдіть ширину мосту, тобто відстань між точками опори арки до землі.
5. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її властивістю (А–Д).
- | Функція | Властивість | А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|---|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 $y = x^2$ | А спадає на всій області визначення. | 1 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2 $y = 3 - x$ | Б областю значень функції є проміжок $(0; +\infty)$. | 2 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 $y = x^3 - 1$ | В є парною. | 3 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 4 $y = x^5 + 3x^3$ | Г зростає на всій області визначення. | 4 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| | Д є непарною. | | | | | |

6. Установіть відповідність між функцією (1–4) та перетвореннями графіка функції (А–Д).

Функція

1 $y = \cos x - \frac{\pi}{3}$

2 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

3 $y = -\sin x$

4 $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

Перетворення графіка функції

А симетричне відображення відносно осі Ox

Б стиск до осі Oy у $\frac{\pi}{3}$ разів

В паралельне перенесення графіка вниз уздовж осі Oy на $\frac{\pi}{3}$

Г паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{3}$ праворуч

Д стиск до осі Ox у $\frac{\pi}{3}$ разів

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

7. Знайдіть найменший додатний період функції $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right) + \cos\left(\frac{3x}{4}\right)$.
8. Установіть графічно кількість коренів рівняння $2\cos x = 3^x$.
9. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = |x|, \\ y = \frac{9}{|x|}. \end{cases}$

Рівень С

1. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = \cos |x|$; 2) $y = 3|\sin x| - 1$.
2. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = \sqrt{4 - (x+1)^2}$; 2) $y = \sqrt{2|x| - 4}$.
3. Лампа розташована на сцені на висоті 6 м. Освітленість поверхні сцени змінюється за законом $E(x) = \frac{120}{x^2 + 36}$, де x — відстань (у метрах) від точки на сцені до проєкції лампи.
- 1) Побудуйте графік функції.
- 2) За графіком визначте, на якій відстані освітленість зменшиться вдвічі від максимальної.
4. Хто чинить більший тиск на поверхню: слон, із масою 3 т, чи жінка, з масою 60 кг, у туфлях на високих підборах?
5. Гучність сирени сигналізації змінюється з часом за законом $L(t) = 70 + 10 \sin(2\pi t)$, де L — гучність звуку (у децибелах), t — час (у секундах).
- 1) Побудуйте графік функції.
- 2) Визначте максимальну і мінімальну гучності сигналізації.
- 3) За графіком знайдіть, у які моменти часу гучність дорівнює 70 децибел.

6. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|}$. Укажіть область визначення функції, нулі функції, інтервали монотонності функції. (ЗНО, 2006 р.).
7. Знайдіть найменший додатний період функції $y = \operatorname{tg} \frac{4\pi x}{9} + \operatorname{ctg} \frac{9\pi x}{4}$.
8. Розв'яжіть графічно рівняння $-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = -x^2 - 1$.
9. При якому значенні параметра a рівняння $|x^2 - 2x - 3| = a$ має рівно три розв'язки?

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я вмію розпізнавати графіки елементарних функцій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію будувати графіки елементарних функцій перетворенням формули, що задає функцію. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію будувати графіки елементарних функцій, використовуючи найпростіші геометричні перетворення. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію графічний метод розв'язування рівнянь. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |