

Урок 3. Властивості функцій**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте основні означення властивостей функцій: область визначення, множина значень, нулі функції, парність/непарність, проміжки знакосталості, зростання/спадання;
- 2) навчитеся правильно аналізувати властивості функції за її формулою;
- 3) навчитеся описувати основні властивості функції за її графіком;
- 4) навчитеся пояснювати свої дії при аналізі властивостей функції;
- 5) зрозумієте, як властивості функцій допомагають у практичних ситуаціях.

II. Повторення (3–4 хв)

1. Які з тверджень про функцію $y = \cos x$ правильні?
 - 1) Функція непарна.
 - 2) Функція спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
 - 3) Область значень функції — відрізок $[-1; 1]$.
 - 4) Область визначення — множина всіх дійсних чисел.
 - 5) Найменшого значення функції не існує.
2. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-11}$. Порівняйте $f(0,99)$ і $f(1)$.
3. Обчисліть нулі функції $y = \frac{x^3 - x^2 - 30x}{x - 6}$.
4. Знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій $y = \left(\frac{1}{36}\right)^{2x}$ і $y = 216$.

5. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = 2^{\left| -\sin \frac{x}{2} \right|} + 5$.
6. Яка з функцій спадає на всій своїй області визначення:
- 1) $y = x^8$; 2) $y = -\frac{8}{x}$; 3) $y = 8 \operatorname{tg} x$; 4) $y = 8^{-x}$?

III. Математичний диктант

- Чи належить точка $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\right)$ графіку функції $y = -2 \operatorname{tg} x$?
- Знайдіть нулі функції $y = (x - 5)^{0.6} + 4$.
- Знайдіть область визначення функції $y = (12 - x)^{\frac{2}{5}}$.
- Знайдіть множину значень функції $y = 4 - 3 \cos x$.
- Знайдіть проміжки знакосталості функції $y = x^2 - 9$.
- Чи правильно, що функція $y = \frac{6}{x}$ спадає на множині дійсних чисел?
- Дослідіть функцію $y = -2x + x^3 - \operatorname{tg} x$ на парність/непарність.
- Визначте найменший додатний період функції $y = 2 \sin (5x + 4)$.
- Відомо, що $f(x) = x^{11}$ та $g(x) = x^{10}$. Порівняйте з нулем значення виразу $g(-3) - f(-2)$.
- Графік функції $y = 7^x$ перенесли паралельно на 4 одиниці вправо вздовж осі абсцис і на 5 одиниць вниз вздовж осі ординат. Запишіть формулу функції, яка утворилася.
- Областю визначення якої з функцій є проміжок $(-\infty; -8]$:

1) $y = \sqrt[6]{x+8}$; 2) $y = \sqrt[6]{8-x}$; 3) $y = \sqrt[6]{-x-8}$; 4) $y = \sqrt[6]{x-8}$?
- Яка з наведених функцій є оберненою до функції $y = x^5$:

1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = 5^x$; 3) $y = \frac{1}{x^5}$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$?

IV. Властивості функцій

1. Область визначення функції

Означення. Областю визначення функції (ОВФ) називається множина значень незалежної змінної, або проєкція графіка на вісь Ox .

Область визначення функції відповідає області допустимих значень відповідного алгебричного виразу і позначається $D(y)$.

Для того, щоб знайти ОВФ, потрібно розв'язати нерівність або систему нерівностей. Існують загальні правила знаходження областей визначення функцій, тобто складання нерівностей або їхніх систем.

Розглянемо деякі з цих правил.

1. Якщо $y = P(x)$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то $D(y) = R$.
2. Якщо $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то $D(y) = R$, крім коренів знаменника, тобто коренів рівняння $Q(x) = 0$.
3. Якщо $y = \sqrt{P(x)}$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $P(x) \geq 0$.
4. Якщо $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $Q(x) > 0$.
5. Якщо $y = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} P(x) \geq 0, \\ Q(x) \geq 0. \end{cases}$$

Примітка. Якщо між коренями парного степеня буде дія множення або ділення, то отримаємо аналогічно систему. Лише при дії ділення підкореневий вираз знаменника строго більший за 0.

2. Область значень функції

Означення. Областю (множиною) значень функції (ОЗФ) називається множина значень залежної змінної, або проекція графіка на вісь Oy .

Множину значень функції позначають $E(y)$.

ОЗФ визначають за графіком функції або виконанням перетворень з формулою, що задає функцію.

Приклад 1. Знайдіть суму найбільшого і найменшого значень функції $y(x) = 5 - 3 \sin \frac{x}{4}$.

Розв'язання. Оскільки $E(\sin x) = [-1; 1]$, тобто $-1 \leq \sin \frac{x}{4} \leq 1$, то $-3 \leq -3 \sin \frac{x}{4} \leq 3$.

Звідси $-3 + 5 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 3 + 5$, а тому $2 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 8$, $2 \leq y \leq 8$.

Отже, множина значень функції $E(y)$: $y \in [2; 8]$, а сума найменшого і найбільшого значень функції становить 10.

Відповідь. 10.

3. Нулі функції

Означення. Точки, в яких функція $y = f(x)$ перетворюється в 0, тобто корені рівняння $f(x) = 0$, називають **нулями функції**.

Якщо побудований графік функції, то нулі функції — це точки перетину графіка з віссю Ox .

Приклад 2. Знайдіть нулі функції $y = \frac{x^3 - 16x}{2\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння: $\frac{x^3 - 16x}{2\sqrt{x}} = 0$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^3 - 16x = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Корені рівняння: -4 , 0 і 4 . Однак, числа -4 і 0 не задовольняють умову $x > 0$, а тому не є нулями функції.

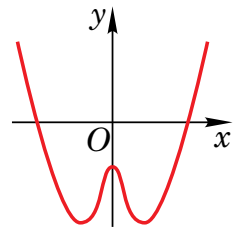
Відповідь. 4 .

4. Парність та непарність функції

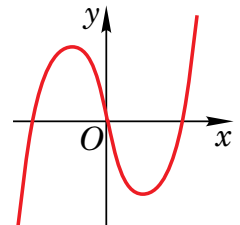
Означення. Функція називається *парною*, якщо виконується рівність $f(-x) = f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Означення. Функція називається *непарною*, якщо виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рисунок).



Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (див. рисунок).



Для того, щоб перевірити функцію на парність, потрібно дослідити пункти 1) – 5).

1. У виразах, куди входить x , замінити x на $(-x)$. Важливо, щоб аргумент $(-x)$ був записаний у дужках.
2. Розкрити дужки, виконати спрощення.
3. Якщо в результаті спрощень отримаємо ту саму формулу, яка задана, то функція — парна.
4. Якщо ні, то потрібно винести знак «мінус» перед формулою функції та перевірити умову $f(-x) = -f(x)$. Якщо ця умова виконується, то функція — непарна.
5. Якщо ні перший, ні другий випадки не виконуються, то функція ні парна, ні непарна.

5. Проміжки сталого знака (знакосталості) функції

Означення. *Проміжками знакосталості* функції називають проміжки, на яких функція зберігає сталий знак, тобто це проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або, інакше, розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Примітка. Щоб дослідити функцію на знакосталість, треба розв'язати нерівність.

6. Монотонність функції

Означення. Функція називається **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Графік зростаючої функції прямує вгору, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Означення. Функція називається **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Графік спадної функції прямує вниз, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

V. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую проблему?

Задача 1. Урожайність $y(x)$ деякого поля (у центнерах з 1 га) залежить від кількості внесених добрив x (у кг на 1 га) за законом $y(x) = -0,05x^2 + 4x + 50$.

- 1) Знайдіть область визначення функції $y(x)$.
- 2) Знайдіть оптимальну кількість добрив для максимальної урожайності.
- 3) Знайдіть максимальний урожай.
- 4) Визначте інтервали впливу внесених добрив на зростання і спадання урожайності.

Задача 2. Кількість інфікованих вірусом людей у невеликому місті описується функцією $g(t) = 50 \cdot 2^{0,3t}$, де $g(t)$ — кількість інфікованих, t — час у днях.

- 1) Знайдіть область визначення та множину значень функції.
- 2) Чи зростає кількість хворих із часом?
- 3) Через скільки днів кількість інфікованих перевищить 400?
- 4) Який показник визначає похідна $g'(t)$?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть основні властивості лінійної функції $y = 8 - 4x$ та побудуйте її графік.

2. Знайдіть нулі функції:

1) $y = \frac{3x}{x^2 - 25}$;

2) $y = \frac{x^2 - 25}{5x}$.

3. Знайдіть інтервали знакосталості функції:

1) $y = 4 - x^2$;

2) $y = 2x^2 - 6$.

4. Визначте найменший додатний період функції:

1) $f(x) = \sin(3\pi x - 2)$;

2) $f(x) = 5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + \pi$.

- ### Рівень В
1. Укажіть основні властивості квадратичної функції $y = 3 - 2x - x^2$ та побудуйте її графік.
 2. Знайдіть інтервали знакосталості функції $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$.
 3. Визначте найменший додатний період функції:
1) $f(x) = 3\sin^2(4\pi x)$; 2) $f(x) = \frac{10}{5 + 5\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi x}{4}\right)}$.
 4. Функції $f(x)$ і $g(x)$ — непарні та періодичні з періодом $T = 2$ і $f(3) = 7$, $g(-4) = -6$. Обчисліть значення виразу: $-7f(-1) + 11g(2)$.
 5. Дослідіть на парність/непарність функцію:
1) $y = x^8 \cos 8x$; 2) $y = x^4 - \cos 3x$.
 6. Знайдіть нулі функції $y = \frac{15 - 3x}{x^2 - 25}$.
 7. Знайдіть суму цілих значень, які належать області визначення функції $y = \sqrt{\frac{5 - x}{x + 3}} - 2$.
 8. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2 + x}$; 2) $y = \frac{(4x - 5)^{\frac{2}{7}}}{\sqrt{3x + 15}}$;
3) $y = -4\cos(5x + 2) - 3$; 4) $y = 4 - 3^{x-1}$.
 9. Обчисліть найбільше значення функції $y = 5x^{-5}$ на проміжку $[1; 3]$.
 10. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = 6x - x^2$.

Рівень С

- 1.** Визначте найменший додатний період функції:

$$1) f(x) = |\sin(3\pi x - 2)|; \quad 2) f(x) = 5 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos(5\pi x - 7).$$

- 2.** Функція $f(x)$ — парна та періодична з періодом $T = 3$. Функція $g(x)$ — непарна й періодична з періодом $T = 4$. Відомо, що $f(-5) = -8$, $g(3) = -2$. Обчисліть значення виразу: $-3f(10 - 2g(23))$.

- 3.** Дослідіть на парність/непарність функцію:

$$1) y = \frac{|x| + 3}{\operatorname{ctg} 3x}; \quad 2) y = 5x - \operatorname{ctg}^5 x.$$

- 4.** Знайдіть область визначення функції $y = \frac{11x}{\sqrt{100 - (0,1)^{4x-5}}}$.

- 5.** Знайдіть область значень функції:

$$1) y = (\cos 5x - \sin 5x)^2; \quad 2) y = \frac{18}{4 \cos^2 x + 5}.$$

- 6.** Знайдіть множину значень функції $y = x^{-5}$ на проміжку $[-2; -1]$.

- 7.** Визначте проміжки знакосталості функції $y = 64 - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$.

- 8.** Знайдіть проміжки монотонності функції $y = \frac{(x+2)(x^2-9)}{x+2}$.

- 9.** Знайдіть область визначення та проміжки монотонності функції

$$y = \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)} \sqrt{x+3}. \text{ Побудуйте її графік.}$$

- 10.** Укажіть основні властивості функції $y = \frac{3x + 2x^2 - x^3}{x}$ та побудуйте її графік.

Рефлексія

- 1.** *Прийом «Незакінчені речення».*

Завершіть фрази:

- сьогодні я дізнався/дізналася
- мені було цікаво, коли
- найскладнішим для мене було
- тепер я можу

- на наступному уроці я хочу
-
-

2. Прийом «Сходи́нки до успі́ху».

Зобразіть сходи́нки та позначте, на якій сходи́нці ви зупинились наприкінці уроку.

Сходи́нка 1. «Я тільки пригадую властивості функцій».

Сходи́нка 2. «Я можу назвати властивості функцій і пояснити їх».

Сходи́нка 3. «Я застосовую властивості функцій при розв’язуванні задач».

Сходи́нка 4. «Я можу пояснити матеріал уроку однокласнику/однокласниці».







