

Урок 3. Властивості функцій**План уроку**

1. Область визначення функцій.
2. Множина значень функцій.
3. Нулі функцій.
4. Парність та непарність функцій.
5. Знакосталість функцій.
6. Практичне знаходження області визначення функції, множини значень функції, нулів функції, парності та непарності функції та знакосталості функції.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані й зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2–1];

визначає прогалини у власних математичних знаннях і вміннях [12 МАО 4.1.3–1];

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–2];

визначає можливості застосування відомих математичних фактів і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу або задачі. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.

- 5) В ілюстративних прикладах описано властивості функцій, заданих графічно та аналітично. Обидва способи є важливими. Найкраще використовувати їх разом.
- 6) Перед детальним повторенням відомостей про властивості функцій варто колективно виконати вправу на повторення властивостей функції, поданої графічно. Або ж виконати цю вправу наприкінці уроку для підсумку.
- 7) Обирайте матеріал із запропонованого на ваш розсуд, акцентуйте увагу на практичних задачах.
- 8) Для побудови графіків функцій використовуйте не лише традиційний підхід, а й можливості графічних калькуляторів Geogebra, Desmos.
- 9) Заплануйте розв'язання практичної задачі (задач). Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі (задач) групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 11) На ваш розсуд, запропонуйте учням/ученицям виконати математичний диктант (чи окремі його вправи) або на початку уроку з пропедевтичною метою, або наприкінці уроку для закріплення вивченого матеріалу.
- 12) Для рефлексії використайте запропоновані прийоми.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи пов'язана з нулями функції потреба економісту підприємства знати, в який момент дохід зрівняється з витратами?
- 2) Чи існує момент часу під час руху тіла, кинутого вертикально вгору, коли його швидкість найменша, а висота — найбільша?
- 3) Чи зростає попит на товар при зниженні його ціни?
- 4) Чи можна від'ємне сальдо в сімейному бюджеті пояснити через властивості функцій?
- 5) Чи важливо лікарю знати значення максимального і мінімального пульсу пацієнта під час навантаження?
- 6) Як змінюється продуктивність корів залежно від кількості спожитого ними корму?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Які з тверджень про функцію $y = \cos x$ правильні?
 - 1) Функція непарна.
 - 2) Функція спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
 - 3) Область значень функції — відрізок $[-1; 1]$.

4) Область визначення — множина всіх дійсних чисел.

5) Найменшого значення функції не існує.

Відповідь. 3), 4).

2. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-11}$. Порівняйте $f(0,99)$ і $f(1)$.

Відповідь. $f(0,99) > f(1)$.

3. Обчисліть нулі функції $y = \frac{x^3 - x^2 - 30x}{x - 6}$.

Відповідь. -5 ; 0 .

4. Знайдіть абсцису точки перетину графіків функцій $y = \left(\frac{1}{36}\right)^{2x}$ і $y = 216$.

Відповідь. $-0,75$.

5. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = 2^{\left|-\sin \frac{x}{2}\right|} + 5$.

Відповідь. 6 — найменше значення функції, 7 — найбільше значення функції.

6. Яка з функцій спадає на всій своїй області визначення:

1) $y = x^8$; 2) $y = -\frac{8}{x}$; 3) $y = 8 \operatorname{tg} x$; 4) $y = 8^{-x}$?

Відповідь. 4).

III. Математичний диктант (7–8 хв)

1. Чи належить точка $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\right)$ графіку функції $y = -2 \operatorname{tg} x$?

2. Знайдіть нулі функції $y = (x - 5)^{0,6} + 4$.

3. Знайдіть область визначення функції $y = (12 - x)^{-\frac{2}{5}}$.

4. Знайдіть множину значень функції $y = 4 - 3 \cos x$.

5. Знайдіть проміжки знакосталості функції $y = x^2 - 9$.

6. Чи правильно, що функція $y = \frac{6}{x}$ спадає на множині дійсних чисел?

7. Дослідіть функцію $y = -2x + x^3 - \operatorname{tg} x$ на парність/непарність.

8. Визначте найменший додатний період функції $y = 2 \sin (5x + 4)$.

9. Відомо, що $f(x) = x^{11}$ та $g(x) = x^{10}$. Порівняйте з нулем значення виразу $g(-3) - f(-2)$.

10. Графік функції $y = 7^x$ перенесли паралельно на 4 одиниці вправо вздовж осі абсцис і на 5 одиниць вниз вздовж осі ординат. Запишіть формулу функції, яка утворилася.

11. Областю визначення якої з функцій є проміжок $(-\infty; -8]$:

1) $y = \sqrt[6]{x + 8}$; 2) $y = \sqrt[6]{8 - x}$; 3) $y = \sqrt[6]{-x - 8}$; 4) $y = \sqrt[6]{x - 8}$?

12. Яка з наведених функцій є оберненою до функції $y = x^5$:

1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = 5^x$; 3) $y = \frac{1}{x^5}$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$?

Відповіді до запитань математичного диктанту

- | | |
|---|---|
| <p>1. Так.</p> <p>2. Немає.</p> <p>3. $x \in (-\infty; 12)$.</p> <p>4. $[1; 7]$.</p> <p>5. $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
 $y < 0$ при $x \in (-3; 3)$.</p> <p>6. Ні.</p> | <p>7. Непарна.</p> <p>8. $\frac{2\pi}{5}$.</p> <p>9. $g(-3) - f(-2) > 0$.</p> <p>10. $y = 7^{x-4} - 5$.</p> <p>11. 3).</p> <p>12. 4).</p> |
|---|---|

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Урожайність $y(x)$ деякого поля (у центнерах з 1 га) залежить від кількості внесених добрив x (у кг на 1 га) за законом $y(x) = -0,05x^2 + 4x + 50$.

- 1) Знайдіть область визначення функції $y(x)$.
- 2) Знайдіть оптимальну кількість добрив для максимальної урожайності.
- 3) Знайдіть максимальний урожай.
- 4) Визначте інтервали впливу внесених добрив на зростання і спадання урожайності.

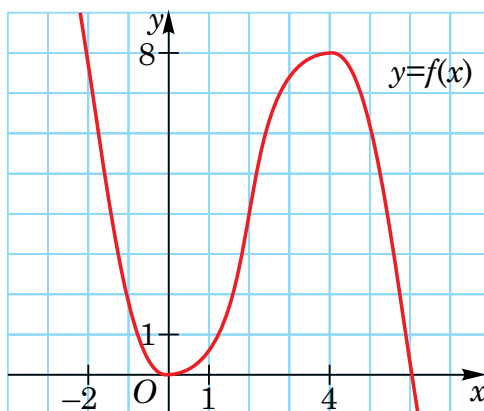
Задача 2. Кількість інфікованих вірусом людей у невеликому місті описується функцією $g(t) = 50 \cdot 2^{0,3t}$, де $g(t)$ — кількість інфікованих, t — час у днях.

- 1) Знайдіть область визначення та множину значень функції.
- 2) Чи зростає кількість хворих із часом?
- 3) Через скільки днів кількість інфікованих перевищить 400?
- 4) Який показник визначає похідна $g'(t)$?

IV. Властивості функцій

Ілюстративний приклад

- 7.** За графіком функції $y = f(x)$ (див. рисунок), укажіть властивості функції.



	Властивості функції	Функція $y = f(x)$
1.	Область визначення функції	$D(y): x \in \mathbb{R}$.
2.	Нулі функції	$x = 0, x = 6$.

	Властивості функції	Функція $y = f(x)$
3.	Область значень функції	$E(y): y \in R.$
4.	Проміжки знакосталості функції	$f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$, $f(x) < 0$, якщо $x \in (6; +\infty)$.
5.	Проміжки монотонності функції	Функція зростає при $x \in [0; 4]$. Функція спадає при $x \in (-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$.
6.	Парність/непарність функції	Ні парна, ні непарна.

1. Область визначення функції

Означення. Областю визначення функції (ОВФ) називається множина значень незалежної змінної, або проєкція графіка на вісь Ox .

Область визначення функції відповідає області допустимих значень відповідного алгебричного виразу і позначається $D(y)$.

Для того, щоб знайти ОВФ, потрібно розв'язати нерівність або систему нерівностей. Існують загальні правила знаходження областей визначення функцій, тобто складання нерівностей або їхніх систем.

Розглянемо деякі з цих правил.

1. Якщо $y = P(x)$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то $D(y) = R$.
2. Якщо $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то $D(y) = R$, крім коренів знаменника, тобто коренів рівняння $Q(x) = 0$.
3. Якщо $y = \sqrt{P(x)}$, де $P(x)$ — багаточлен від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $P(x) \geq 0$.
4. Якщо $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати нерівність $Q(x) > 0$.
5. Якщо $y = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — багаточлени від однієї змінної x , то для знаходження $D(y)$ треба розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} P(x) \geq 0, \\ Q(x) \geq 0. \end{cases}$$

Примітка. Якщо між коренями парного степеня буде дія множення або ділення, то отримаємо аналогічно систему. Лише при дії ділення підкореневий вираз знаменника строго більший за 0.

Ілюстративні приклади

8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x \operatorname{tg} 3} + \frac{4}{3^x - \frac{1}{9}}$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 3 \approx \operatorname{tg} 172^\circ < 0$, а також виконуються умови:

$$\begin{cases} x \operatorname{tg} 3 \geq 0, \\ 3^x - \frac{1}{9} \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ 3^x \neq 3^{-2}; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x \neq -2, \end{cases} \text{ то } D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0].$$

Відповідь. $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0]$.

9. Знайдіть область визначення функції $y(x) = (2-x)^{-\frac{1}{5}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Для визначення області визначення функції складемо й розв'яжемо систему нерівностей: $\begin{cases} 2-x > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Отже, $D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Відповідь. $D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

2. Область значень функції

Означення. Областю (множиною) значень функції (ОЗФ) називається множина значень залежної змінної, або проекція графіка на вісь Oy .

Множину значень функції позначають $E(y)$.

ОЗФ визначають за графіком функції або виконанням перетворень з формулою, що задає функцію.

Ілюстративні приклади

10. Знайдіть суму найбільшого і найменшого значень функції $y(x) = 5 - 3 \sin \frac{x}{4}$.

Розв'язання. Оскільки $E(\sin x) = [-1; 1]$, тобто $-1 \leq \sin \frac{x}{4} \leq 1$, то $-3 \leq -3 \sin \frac{x}{4} \leq 3$.

Звідси $-3 + 5 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 3 + 5$, а тому $2 \leq -3 \sin \frac{x}{4} + 5 \leq 8$, $2 \leq y \leq 8$.

Отже, множина значень функції $E(y): y \in [2; 8]$, а сума найменшого і найбільшого значень функції становить 10.

Відповідь. 10.

11. Знайдіть множину значень функції $y(x) = 5^{2|x|-1}$.

Розв'язання. Оскільки $|x| \geq 0$, $2|x| \geq 0$, то $2|x| - 1 \geq -1$.

Тоді $5^{2|x|-1} \geq 5^{-1} = \frac{1}{5}$, тобто $y(x) \geq \frac{1}{5}$.

Отже, множина значень функції $E(y): y \in [0,2; +\infty)$.

Відповідь. $[0,2; +\infty)$.

3. Нулі функції

Означення. Точки, в яких функція $y = f(x)$ перетворюється в 0, тобто корені рівняння $f(x) = 0$, називають **нулями функції**.

Якщо побудований графік функції, то нулі функції — це точки перетину графіка з віссю Ox .

Ілюстративні приклади

- 12.** Знайдіть нулі функції $y = \frac{x^3 - 16x}{2\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння: $\frac{x^3 - 16x}{2\sqrt{x}} = 0$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^3 - 16x = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Корені рівняння: -4 , 0 і 4 . Однак, числа -4 і 0 не задовольняють умову $x > 0$, а тому не є нулями функції.

Відповідь. 4 .

- 13.** Скільки нулів має функція $y = \cos 3x$ на проміжку $[0; 2\pi]$?

Розв'язання. На проміжку $[0; 2\pi]$ функція $y = \cos x$ має два нулі, тобто графік функції двічі перетинає вісь Ox . Оскільки $T = \frac{2\pi}{3}$ — період функції $y = \cos 3x$ —

зменшився втричі, то на проміжку $[0; 2\pi]$ кількість точок перетину збільшилася втричі. Отже, функція $y = \cos 3x$ на заданому проміжку матиме шість нулів.

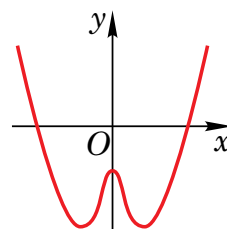
Відповідь. Шість.

4. Парність та непарність функції

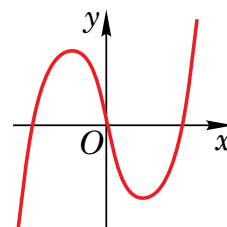
Означення. Функція називається *парною*, якщо виконується рівність $f(-x) = f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Означення. Функція називається *непарною*, якщо виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, для всіх x із області її визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рисунок).



Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (див. рисунок).



Для того, щоб перевірити функцію на парність, потрібно дослідити пункти 1) – 5).

- 1.** У виразах, куди входить x , замінити x на $(-x)$. Важливо, щоб аргумент $(-x)$ був записаний у дужках.
- 2.** Розкрити дужки, виконати спрощення.
- 3.** Якщо в результаті спрощень отримаємо ту саму формулу, яка задана, то функція — парна.

4. Якщо ні, то потрібно винести знак «мінус» перед формулою функції та перевірити умову $f(-x) = -f(x)$. Якщо ця умова виконується, то функція — непарна.
5. Якщо ні перший, ні другий випадки не виконуються, то функція ні парна, ні непарна.

Ілюстративні приклади

14. На якому з рисунків 1) – 5) зображено графік парної функції, а на якому — непарної?

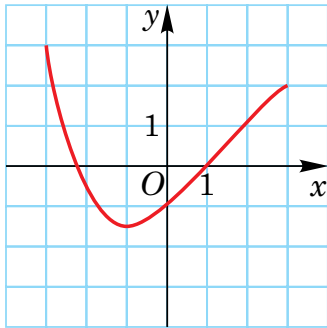


Рис. 1

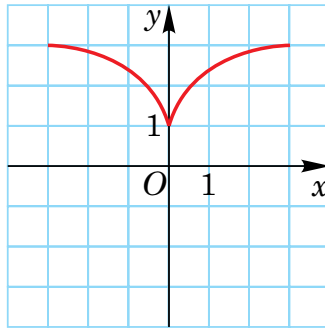


Рис. 2

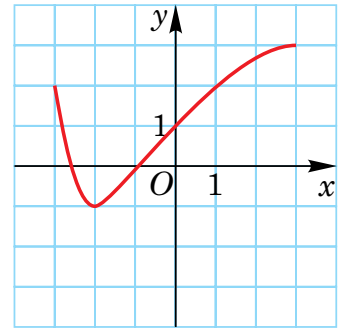


Рис. 3

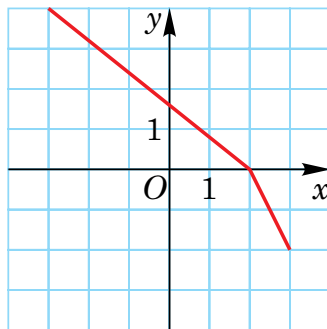


Рис. 4

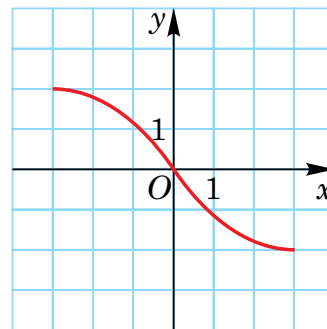


Рис. 5

Відповідь. Рис. 2 – парна функція. Рис. 5 – непарна функція.

15. Дослідіть функцію $f(x) = 2\sin 3x \cdot \cos 5x$ на парність.

Розв'язання. Для цього знайдемо $f(-x)$: $f(-x) = 2\sin 3(-x) \cdot \cos 5(-x)$,

$$f(-x) = 2\sin(-3x) \cdot \cos(-5x),$$

$$f(-x) = 2(-\sin 3x) \cdot \cos 5x, f(-x) = -2\sin 3x \cdot \cos 5x.$$

Оскільки $f(-x) = -f(x)$, то функція є непарною.

Відповідь. Функція непарна.

16. Непарна функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел. Які з наведених тверджень правильні:

1) $f(-100) = -f(100)$;

2) $f(-200) = f(200)$;

3) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі абсцис;

4) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі ординат;

5) графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно початку координат?

Відповідь. 1) і 5).

5. Проміжки сталого знака (знакосталості) функції

Означення. *Проміжками знакосталості* функції називають проміжки, на яких функція зберігає сталий знак, тобто це проміжки, на яких функція додатна (від'ємна), або, інакше, розв'язки нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Примітка. Щоб дослідити функцію на знакосталість, треба розв'язати нерівність.

Ілюстративні приклади

- 17.** Знайдіть проміжки знакосталості функції $f(x) = 3^{x+4} - 9^x$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність $f(x) > 0$: $3^{x+4} - 9^x > 0$, $3^{x+4} > 3^{2x}$,
 $x + 4 > 2x$, $x < 4$. Отже, $x \in (-\infty; 4)$.

Нерівність $f(x) < 0$ виконується, якщо $x > 4$.

Відповідь. Якщо $x \in (-\infty; 4)$, то функція набуває додатних значень. Якщо $x \in (4; +\infty)$, то функція набуває від'ємних значень.

- 18.** Знайдіть проміжки знакосталості функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 40}{16 - x^2}$.

Розв'язання. Використаємо метод інтервалів. Для цього знайдемо нулі функції

і точки, які не належать області визначення функції:
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 40 = 0, \\ 16 - x^2 \neq 0. \end{cases}$$

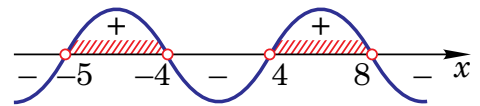
Звідси, $x = -5$, $x = 8$, $x \neq -4$, $x \neq 4$.

Функція набуває додатних значень, якщо $x \in (-5; -4) \cup (4; 8)$.

Функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 4) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь. Якщо $x \in (-5; -4) \cup (4; 8)$, то функція набуває додатних значень.

Якщо $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 4) \cup (8; +\infty)$, то функція набуває від'ємних значень.



6. Монотонність функції

Означення. Функція називається *зростаючою* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Графік зростаючої функції прямує вгору, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Означення. Функція називається *спадною* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Графік спадної функції прямує вниз, якщо рухатися по осі Ox у додатному напрямку.

Ілюстративні приклади

- 19.** Функція $y = f(x)$ є спадною на множині дійсних чисел. Укажіть правильну нерівність: 1) $f(2) > f(-2)$; 2) $f(2) < f(3)$; 3) $f(2) > f(1)$; 4) $f(-2) < f(0)$; 5) $f(2) > f(5)$.

Розв'язання.

Функція є спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Оскільки $5 > 2$ і $f(2) > f(5)$, то правильна нерівність 5).

Відповідь. 5).

20. Дослідіть функцію $y = x(6 - x)$ на монотонність.

Розв'язання.

I спосіб. Оскільки $x(6 - x) = 6x - x^2$, то $y = -x^2 + 6x$ — квадратична функція, графіком є парабола, вітки якої спрямовані вниз. Вершина параболи міститься в точці $(3; 9)$. Тоді функція зростає при $x \in (-\infty; 3]$, функція спадає при $x \in [3; +\infty)$.

II спосіб. Знайдемо похідну функції $y'(x) = (-x^2 + 6x)' = 6 - 2x$.

Функція зростає, якщо $y'(x) \geq 0$, то $6 - 2x \geq 0$, $x \leq 3$.

Функція спадає, якщо $y'(x) \leq 0$, то $6 - 2x \leq 0$, $x \geq 3$.

Відповідь. Функція зростає при $x \in (-\infty; 3]$. Функція спадає при $x \in [3; +\infty)$.

V. Розв'язування практичних задач. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую проблему?

Задача 1. Урожайність $y(x)$ деякого поля (у центнерах з 1 га) залежить від кількості внесених добрив x (у кг на 1 га) за законом $y(x) = -0,05x^2 + 4x + 50$.

1) Знайдіть область визначення функції $y(x)$.

2) Знайдіть оптимальну кількість добрив для максимальної урожайності.

3) Знайдіть максимальний урожай.

4) Визначте інтервали впливу внесених добрив на зростання і спадання урожайності.

Розв'язання. 1) Область визначення функції $x \geq 0$, оскільки кількість добрив — невід'ємна.

2) Квадратична функція, графік якої спрямований вітками вниз, набуває максимуму у вершині параболи, тому $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$, $x_{\max} = -\frac{4}{2 \cdot (-0,05)} = 40$ (кг/га).

3) Максимальний урожай $y(40) = -0,05 \cdot 40^2 + 4 \cdot 40 + 50 = 130$ (ц/га).

4) Функція зростає при $x \in [0; 40]$, спадає при $x \in [40; +\infty)$.

Якщо добрив замало, рослинам бракує поживних речовин, тому урожайність низька.

При оптимальній кількості добрив урожай — максимальний.

Якщо добрив занадто багато, може виникати засолення ґрунту, порушення водного балансу, тому врожайність зменшується.

Відповідь. 1) $x \in [0; +\infty)$. 2) 40 кг/га. 3) 130 ц/га. 4) Внесення 40 кг/га добрив забезпечує максимальний урожай 130 ц/га.

Задача 2. Кількість інфікованих вірусом людей у невеликому місті описується функцією $g(t) = 50 \cdot 2^{0,3t}$, де $g(t)$ — кількість інфікованих, t — час у днях.

1) Знайдіть область визначення та множину значень функції.

2) Чи зростає кількість хворих із часом?

3) Через скільки днів кількість інфікованих перевищить 400?

4) Який показник визначає похідна $g'(t)$?

Розв'язання. 1) Оскільки t — час у днях, то $t \geq 0$.

При $t = 0$ кількість інфікованих людей становить $g(0) = 50 \cdot 2^{0,3 \cdot 0} = 50$, тому $g(t) \in [50; +\infty)$.

2) Функція зростає, бо показникова функція має основу більшу за 1.

3) Якщо $50 \cdot 2^{0,3t} > 400$, $2^{0,3t} > 8$, то $0,3t > 3$, $t > 10$. Тобто після десяти днів кількість інфікованих перевищить 400 осіб.

4) $g'(t)$ визначає швидкість зараження вірусом, тобто кількість нових інфікованих на день, яка зростає.

Відповідь. 1) $t \in [0; +\infty)$. 2) Зростає. 3) Після десяти днів. 4) Швидкість зараження вірусом.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть основні властивості лінійної функції $y = 8 - 4x$ та побудуйте її графік.
2. Знайдіть нулі функції:
 - 1) $y = \frac{3x}{x^2 - 25}$;
 - 2) $y = \frac{x^2 - 25}{5x}$.
3. Знайдіть інтервали знакосталості функції:
 - 1) $y = 4 - x^2$;
 - 2) $y = 2x^2 - 6$.
4. Визначте найменший додатний період функції:
 - 1) $f(x) = \sin(3\pi x - 2)$;
 - 2) $f(x) = 5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + \pi$.
5. Функції $f(x)$ і $g(x)$ — парні і $f(3) = 7$, $g(-4) = -6$. Обчисліть значення виразу $-11f(-3) + 7g(4)$.
6. Дослідіть на парність/непарність функцію:
 - 1) $y = -x^4 + 8$,
 - 2) $y = \operatorname{ctg}^3 10x$.
7. Знайдіть суму цілих значень, які належать області визначення функції:
 - 1) $y = \sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$;
 - 2) $y = \sqrt{9x - x^2}$.
8. Знайдіть область визначення функції:
 - 1) $y = \sqrt{3x-1} - \sqrt{4-2x}$;
 - 2) $y = \sqrt[8]{1-x^2}$;
 - 3) $y = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2-9}$.
9. Знайдіть область значень функції:
 - 1) $y = 2 - \sin 3x$;
 - 2) $y = 6 - |x|$.
10. Знайдіть найменше значення функції $y = -2x^2$ на проміжку $[-1; 2]$.
11. Серед функцій 1) – 5) виберіть функцію, яка зростає на всій області визначення:
 - 1) $y = x^2 + 4$;
 - 2) $y = \frac{4}{x^2}$;
 - 3) $y = 4\operatorname{ctg} x$;
 - 4) $y = -4\sqrt{-x}$;
 - 5) $y = 4^{-x}$.

Рівень В

1. Укажіть основні властивості квадратичної функції $y = 3 - 2x - x^2$ та побудуйте її графік.
2. Знайдіть інтервали знакосталості функції $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$.
3. Визначте найменший додатний період функції:
1) $f(x) = 3\sin^2(4\pi x)$; 2) $f(x) = \frac{10}{5 + 5\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi x}{4}\right)}$.
4. Функції $f(x)$ і $g(x)$ — непарні та періодичні з періодом $T = 2$ і $f(3) = 7$, $g(-4) = -6$. Обчисліть значення виразу: $-7f(-1) + 11g(2)$.
5. Дослідіть на парність/непарність функцію:
1) $y = x^8 \cos 8x$; 2) $y = x^4 - \cos 3x$.
6. Знайдіть нулі функції $y = \frac{15 - 3x}{x^2 - 25}$.
7. Знайдіть суму цілих значень, які належать області визначення функції $y = \sqrt{\frac{5-x}{x+3}} - 2$.
8. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2+x}$; 2) $y = \frac{(4x-5)^{\frac{2}{7}}}{\sqrt{3x+15}}$;
3) $y = -4\cos(5x+2) - 3$; 4) $y = 4 - 3^{x-1}$.
9. Обчисліть найбільше значення функції $y = 5x^{-5}$ на проміжку $[1; 3]$.
10. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = 6x - x^2$.

Рівень С

1. Визначте найменший додатний період функції:
1) $f(x) = |\sin(3\pi x - 2)|$; 2) $f(x) = 5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos(5\pi x - 7)$.
2. Функція $f(x)$ — парна та періодична з періодом $T = 3$. Функція $g(x)$ — непарна й періодична з періодом $T = 4$. Відомо, що $f(-5) = -8$, $g(3) = -2$. Обчисліть значення виразу: $-3f(10 - 2g(23))$.
3. Дослідіть на парність/непарність функцію:
1) $y = \frac{|x|+3}{\operatorname{ctg} 3x}$; 2) $y = 5x - \operatorname{ctg}^5 x$.
4. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{11x}{\sqrt{100 - (0,1)^{4x-5}}}$.
5. Знайдіть область значень функції:
1) $y = (\cos 5x - \sin 5x)^2$; 2) $y = \frac{18}{4\cos^2 x + 5}$.
6. Знайдіть множину значень функції $y = x^{-5}$ на проміжку $[-2; -1]$.

7. Визначте проміжки знакосталості функції $y = 64 - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$.
8. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = \frac{(x+2)(x^2-9)}{x+2}$.
9. Знайдіть область визначення та проміжки монотонності функції $y = \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\sqrt{x+3}$. Побудуйте її графік.
10. Укажіть основні властивості функції $y = \frac{3x + 2x^2 - x^3}{x}$ та побудуйте її графік.

VII. Рефлексія (2–3 хв)

1. Прийом «Незакінчені речення».

Запропонуйте учням/ученицям завершити фрази:

- сьогодні я дізнався/дізналася
- мені було цікаво, коли
- найскладнішим для мене було
- тепер я можу
- на наступному уроці я хочу

2. Прийом «Сходи́нки до успіху».

Запропонуйте учням/ученицям зобразити сходи́нки та позначити, на якій сходи́нці вони зупинились наприкінці уроку.

Сходи́нка 1. «Я тільки пригадую властивості функцій».

Сходи́нка 2. «Я можу назвати властивості функцій і пояснити їх».

Сходи́нка 3. «Я застосовую властивості функцій при розв'язуванні задач».

Сходи́нка 4. «Я можу пояснити матеріал уроку однокласнику/однокласниці».