

Урок 4. Властивості функцій. Похідні функцій**РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) повторите відомості про похідну та правила її знаходження;

2) пригадаєте, як шукати критичні точки, проміжки зростання/спадання, точки екстремуму і екстремуми функції;

3) повторите, як знаходити найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку;

4) пригадаєте послідовність розв'язування практичних задач на знаходження критичних точок, проміжків зростання/спадання функції, екстремумів, найбільшого або найменшого значень функції;

5) проаналізуєте приклади і застосуєте знання до реальних практичних ситуацій.

II. Повторення

1. Обчисліть: $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2} + \sqrt{(\sqrt{11} - 4)^2}$.
2. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,8}(4x) \geq 2$.
3. Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) = -10$. Визначте значення похідної функції $g(x) = -3 \cdot f(x) - 50x + 27$ в точці x_0 .
4. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = 5x^4 - 2$ у точці $x_0 = -2$.
5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = 9 - 8\cos x$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
6. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{7}{x^4}$.
7. Скільки критичних точок має функція $f(x) = 0,25x^4 + x^3 - 2x^2 + 8$ на проміжку $[-6; 0]$?

III. Похідні функцій

1. Означення похідної функції

Означення. Відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ називають **різницеvim відношенням** приросту функції до приросту аргументу.

Означення. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається число, до якого прямує різницеве відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Залежно від графіка функції, точка N може «швидше» або «повільніше» наближатися до нерухомої точки M з абсцисою x_0 , тому похідна функції в точці x_0 визначає швидкість зміни функції в точці x_0 .

Означення. Функція, що має похідну в точці x_0 , називається **диференційовною** в цій точці.

Якщо точка рухається по прямій і відома її координата руху $x(t)$, то середня швидкість руху тіла за проміжок часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ визначається так:

$$v_c(\Delta t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Приклад 1. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 4t^3 - 5t^2$, де $x(t)$ — положення тіла (в метрах), а t — час (у секундах). Знайдіть середню швидкість у момент часу $t = 4$ с після початку руху.

Розв'язання. Нехай $t_0 = 0$, $t = 4$, тоді $\Delta t = 4$. Знайдемо положення тіла в момент часу t_0 і t .

$$x(t_0) = 0 \text{ (м)}, \quad x(t) = 4 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 = 176 \text{ (м)}.$$

Середню швидкість руху тіла обчислимо за формулою:

$$v_c(\Delta t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{176 - 0}{4} = 44 \text{ (м/с)}.$$

Отже, середня швидкість руху тіла становить 44 м/с.

Відповідь. 44 м/с.

2. Правила обчислення похідних

Значення функцій $f(x)$ та $g(x)$ та їхніх похідних у точці x_0 позначимо коротко так:

$$f(x_0) = f, g(x_0) = g, f'(x_0) = f', g'(x_0) = g'.$$

Теореми, наслідки	Ілюстративні приклади
Теорема 1. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0, то їхня сума диференційовна в цій точці і $(f + g)' = f' + g'$. Отже, похідна суми дорівнює сумі похідних.	Приклад 2. Знайдіть похідну функції $y(x) = x^8 - 4x^3 + 2x - 7$. <i>Розв'язання.</i> Похідну функції $y(x) = x^8 - 4x^3 + 2x - 7$ знайдемо за правилом обчислення похідної суми функцій та формулою похідної степеневі функції: $y'(x) = (x^8 - 4x^3 + 2x - 7)' = (x^8)' - (4x^3)' + (2x)' - (7)' = 8x^7 - 12x^2 + 2.$ <i>Відповідь.</i> $8x^7 - 12x^2 + 2$.
Теорема 2. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0, то їхній добуток диференційовний у цій точці і $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.	Приклад 3. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^7 \sqrt{x}$. <i>Розв'язання.</i> $f'(x) = (x^7 \sqrt{x})' = (x^7)' \sqrt{x} + x^7 (\sqrt{x})' = 7x^6 \sqrt{x} + x^7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^7}{2\sqrt{x}}.$ <i>Відповідь.</i> $\frac{15x^7}{2\sqrt{x}}$.
Наслідок теореми 2. Якщо функція f диференційовна в точці x_0, а C — константа, то функція Cf диференційовна в цій точці і $(C \cdot f)' = C \cdot f'$. Отже, константу можна виносити за знак похідної.	Приклад 4. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{8}$. <i>Розв'язання.</i> $f'(x) = \frac{1}{8} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{8 \sin^2 x}.$ <i>Відповідь.</i> $-\frac{1}{8 \sin^2 x}$.
Теорема 3. Якщо функції f і g диференційовні в точці x_0, і функція g не дорівнює нулю в цій точці, то їхня частка $\frac{f}{g}$ також диференційовна в цій точці і $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.	Приклад 5. Знайдіть похідну функції $y = \frac{5x}{3-2x}$. <i>Розв'язання.</i> $y' = \frac{(5x)'(3-2x) - 5x(3-2x)'}{(3-2x)^2} = \frac{5(3-2x) - 5x(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{15}{(3-2x)^2}.$ <i>Відповідь.</i> $\frac{15}{(3-2x)^2}$.

Теореми, наслідки	Ілюстративні приклади
Теорема 4. Якщо функція f має похідну в точці x_0, а функція g має похідну в точці y_0, $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x_0))$ також має похідну в точці x_0 таку, що $h'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Отже, для обчислення похідної складеної функції треба знайти добуток похідної зовнішньої функції на похідні всіх внутрішніх функцій.	Приклад 6. Знайдіть похідну функції $y = \sqrt{8-3x}$. Розв'язання. $y' = \frac{1}{2\sqrt{8-3x}} \cdot (8-3x)' = -\frac{3}{2\sqrt{8-3x}}.$ Відповідь. $-\frac{3}{2\sqrt{8-3x}}$.

3. Монотонність функцій. Ознаки зростання та спадання функції

Знак похідної функції на деякому проміжку визначає зростання або спадання функції на цьому проміжку. Зв'язок між знаком похідної та монотонністю функції установлюють ознаки зростання та спадання функції.

Теорема. Ознака зростання функції. Якщо для всіх x з деякого проміжку виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Теорема. Ознака спадання функції. Якщо для всіх x з деякого проміжку виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Примітка. Зазначені проміжки у теоремах визначають критичні точки функції.

4. Точки екстремуму

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками функції**.

Наприклад, для функції $f(x) = 12x - 1,5x^2$ знайдемо похідну $f'(x) = 12 - 3x$.

Оскільки $f'(x) = 0$ при $x = 4$, то ця точка є критичною точкою функції $f(x) = 12x - 1,5x^2$.

Якщо при переході через критичну точку похідна функції змінює свій знак, то така критична точка називається точкою екстремуму. Точки екстремуму бувають двох видів — точки максимуму й точки мінімуму.

Теорема. Ознака точки максимуму функції. Нехай функція $f(x)$ є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

Теорема. Ознака точки мінімуму функції. Нехай функція $f(x)$ є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Тобто, якщо при переході через критичну точку x_0 , у якій функція є неперервною, похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму. Якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму.

Для функції $f(x)$ точки екстремуму можна шукати за такою схемою:

- 1) знайдіть $f'(x)$;
- 2) дослідіть знак похідної в околах (ліворуч і праворуч) критичних точок;
- 3) за допомогою ознак зростання й спадання функції з'ясуйте, чи є критична точка точкою екстремуму.

Приклад 7. Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну заданої функції $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Критичні точки функції: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, звідси $x = 0$, $x = 2$.

Графіком функції $f'(x) = 3x^2 - 6x$ є парабола, напрямлена вітками вгору.

Оскільки при переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то точка $x = 2$ є точкою мінімуму функції. При переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тоді точка $x = 0$ є точкою максимуму функції.

Відповідь. $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 2$.

5. Знаходження найбільших та найменших значень функцій на заданому проміжку

Найбільшого і найменшого значень на деякому проміжку $[a; b]$ функція може набувати або на кінцях цього проміжку, тобто при $x = a$, $x = b$, або в критичних точках, які належать проміжку $[a; b]$.

Тому пошук найбільшого і найменшого значень на заданому проміжку $[a; b]$ можна проводити за такою схемою:

- 1) обчисліть значення заданої функції $f(x)$ на кінцях проміжку $[a; b]$, тобто $f(a)$ і $f(b)$;
- 2) знайдіть критичні точки, які належать відрізку $[a; b]$;
- 3) обчисліть значення заданої функції $f(x)$ у знайдених критичних точках;
- 4) з усіх знайдених значень оберіть найбільше і найменше значення.

Алгоритм розв'язування практичних задач на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини

- 1) Одну з невідомих величин позначте як x та знайдіть межі її значень. Інші величини виразіть через x .
- 2) Складіть функцію, яка буде математичною моделлю задачі.
- 3) Знайдіть найбільше або найменше значення отриманої функції на проміжку значень x .
- 4) Проаналізуйте отриманий результат та запишіть відповідь до задачі.

IV. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відеофайл із розміром 500 МБ завантажується двома способами за допомогою двох різних сервісів:

- експоненційна модель $f_1(t) = 500(1 - e^{-0,8t})$;

- ## V. Тренувальні вправи та задачі. Три рівні складності: А, В, С

2. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0 :
 1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$; 2) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}$, $x_0 = -32$.
3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3 - x$ у точці $x_0 = -2$.
4. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq g'(x)$, де $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x - x^3$.
5. Визначте кількість точок екстремуму функції $f(x) = 0,25x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$.
6. Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремуму функції:
 1) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 3$; 2) $f(x) = \frac{x^2 - 7x}{x + 9}$.
7. Визначте найбільше та найменше значення функції на проміжку:
 1) $f(x) = x^3 - 6x$, $x \in [-2; 1]$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, $x \in [1; 4]$.
8. Підприємство продає товар на ринку з лінійним попитом $q(p) = 10000 - 20p$, де q — кількість одиниць товару, що реалізуються, p — ціна товару (в гривнях). Загальні витрати залежно від кількості $C(q) = 5000 + 10p + 0,01q^2$, фіксовані витрати 5000 грн, змінні витрати 10 грн на одиницю. Знайдіть ціну p , обсяг випуску q і прибуток P , які максимізують прибуток фірми.

Рівень С

1. Знайдіть похідну функції:
 1) $y = (x^2 - 4x + 2)^3$; 2) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 1}$; 3) $y = \sqrt[4]{\cos 3x}$.
2. Визначте координати точки, в якій дотична, проведена до графіка функції $y = \sqrt{x + 2}$, паралельна прямій $y = x + 10$.
3. Обчисліть суму цілих розв'язків нерівності $\frac{(x-2) \cdot f'(x)}{x-4} \geq 0$, якщо $f(x) = 15 + 27x - x^3$.
4. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq g'(x)$, де $f(x) = \frac{x^4 + 3}{3x}$, $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$.
5. Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремуму функції:
 1) $f(x) = \sqrt{x}(x + 1)$; 2) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 3) $f(x) = x + \frac{27}{x^3}$.
6. За якого значення параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1; 3]$ дорівнює 30? (Пробне ЗНО, 2005 р.).
7. Знайдіть суму найбільшого та найменшого значень функції $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$ на відрізку $[0; 6]$ (ЗНО, 2005 р.).
8. Розбийте число 150 на три таких невід'ємних доданки, щоб два з них відносились, як 2 : 3, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.
9. Знайдіть периметр прямокутника з найбільшою площею, вписаного в коло з радіусом R .

Рефлексія

Заповніть чотири кейси.

1. «Відкриття». Що було новим?
2. «Складність». Що викликало труднощі?
3. «Ідея». Що і як можна застосувати?
4. «Запитання». Сформулюйте запитання собі або однокласникам/однокласницям.







