

Урок 4. Куля та сфера

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розпізнавати кулю та сферу серед інших геометричних тіл;
- 2) пояснювати, як утворюється куля (сфера) як тіло обертання;
- 3) будувати та аналізувати переріз кулі (сфери) площинами;
- 4) визначати велике коло (великий круг);
- 5) будувати дотичну площину до сфери (кулі);
- 6) застосовувати формулу для обчислення площі сфери;
- 7) використовувати набуті знання для розв'язування геометричних задач.

II. Повторення (5 хв)

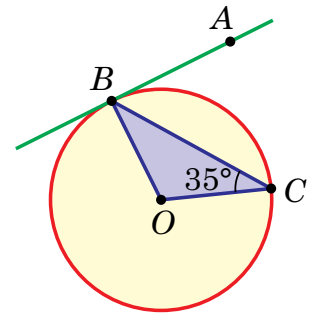
1. Каркас колеса огляду складається з двох однакових кіл, до яких прикріплено 18 кабінок на однаковій відстані одна від одної, та ребер (радіусів кіл), що з'єднують місця прикріплення кабінок (див. рисунок). Довжина кожного ребра дорівнює 27 м. Визначте довжину дуги AB кола із центром у точці O . Укажіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною каркаса знехтуйте. (ЗНО, 2020 р.).

А	Б	В	Г	Д
12,6 м	9,5 м	5,4 м	4,6 м	3,2 м



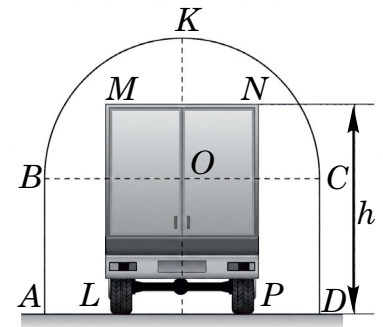
2. До кола з центром у точці O проведено дотичну AB , B — точка дотику (див. рисунок). BC — хорда, що утворює з радіусом кола кут 35° . Знайдіть градусну міру кута ABC .

А	Б	В	Г	Д
35°	45°	55°	65°	70°



3. На рисунку зображено поперечний переріз аркового проїзду, верхня частина якого (дуга BKC) має форму півкола з радіусом $OC = 2$ м. Відрізки AB і DC перпендикулярні до AD , $AB = DC = 2$ м. Яке з наведених значень є найбільшим можливим значенням висоти h вантажівки, за якого вона зможе проїхати через цей арковий проїзд, не торкаючись верхньої частини арки (дуги BKC)? Уважайте, що $LMNP$ — прямокутник, у якому $MN = 2,4$ м і $MN \parallel AD$. (ЗНО, 2017 р.).

А	Б	В	Г	Д
4,4 м	4 м	3,7 м	3,5 м	3,2 м



4. Озеро Ялпуг є найбільшою природною водоймою в Україні. Його площа становить 149 млн м^2 . Запишіть це число у стандартному вигляді. (НМТ, 2025 р.).

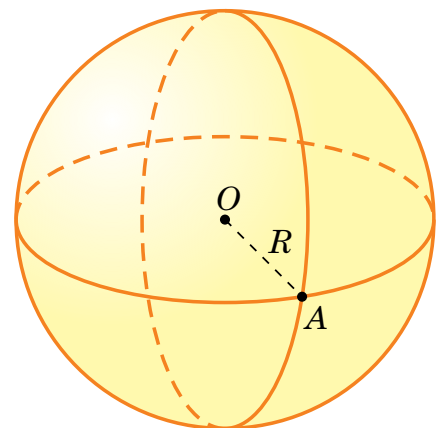
А	Б	В	Г	Д
$14,9 \cdot 10^8$	$14,9 \cdot 10^{-8}$	$1,49 \cdot 10^8$	$149 \cdot 10^6$	$0,149 \cdot 10^8$

5. Два кола, довжини яких дорівнюють 9π см і 36π см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих кіл (у см). (ЗНО, 2010 р.).

III. Сфера, куля. Куля як тіло обертання

Означення. *Сферою* називається геометричне тіло, яке складається з усіх точок простору, розташованих на заданій відстані від заданої точки.

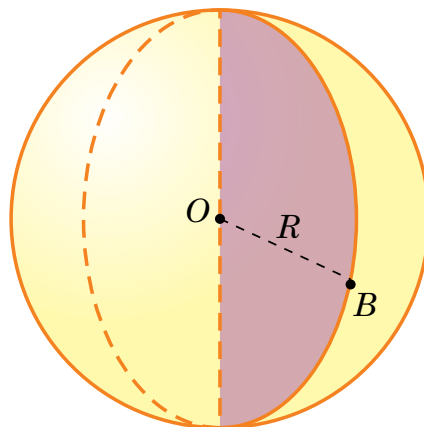
На рисунку зображено сферу. O — центр сфери, $OA = R$ — радіус сфери.



Означення. Сферою називають геометричне тіло, яке утворюється внаслідок обертання півкола навколо його діаметра.

Означення. Кулею називається геометричне тіло, яке складається з усіх точок простору, розташованих на відстані, не більшій за задану, від заданої точки.

На рисунку зображено кулю. O — центр кулі, $OB = R$ — радіус кулі.

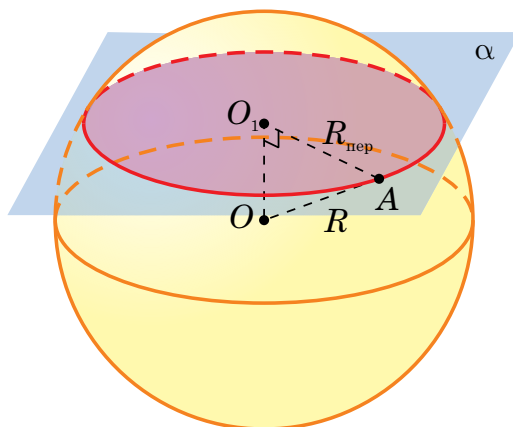


Означення. Кулею називають геометричне тіло, яке утворюється внаслідок обертання півкруга навколо його діаметра.

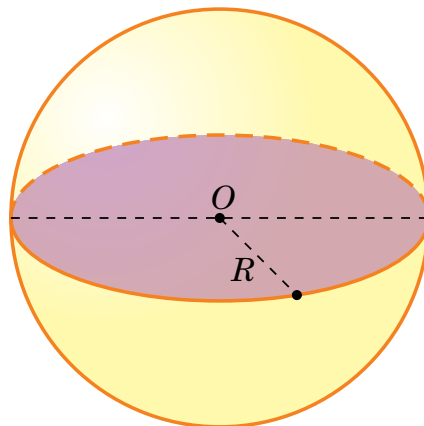
IV. Переріз сфери (кулі) площиною. Ортогональна проєкція центра сфери (кулі) на площину перерізу. Велике коло (великий круг)

Будь-який переріз сфери (кулі) площиною є колом (кругом). На рисунку зображено переріз сфери (кулі) з радіусом $OA = R$ площиною α .

Точка O_1 — ортогональна проєкція центра O сфери (кулі) на площину перерізу, $OO_1 = H$ — відстань від центра сфери до площини перерізу. Таким чином, використовуючи теорему Піфагора для трикутника AO_1O , маємо, що радіус перерізу $R_{\text{пер}}$ обчислюється за формулою: $R_{\text{пер}} = \sqrt{R^2 - H^2}$.



Означення. Переріз сфери (кулі), що проходить через центр сфери (кулі), називається **великим колом (великим кругом)** (див. рисунок).



Приклад 1. У кулі з радіусом 26 см на відстані 10 см від центра проведено січну площину. Знайдіть площу перерізу.

Розв'язання.

1) Виконаємо побудову (див. рисунок). O — центр кулі, O_1 — центр перерізу, A — точка, на колі, яке обмежує переріз. За умовою, $OA = 26$ см, $OO_1 = 10$ см.

2) Із прямокутного трикутника AO_1O :

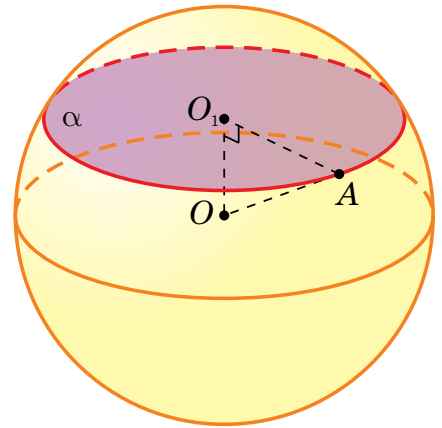
$$O_1A^2 = OA^2 - OO_1^2, \text{ тобто:}$$

$$O_1A = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ (см).}$$

3) Таким чином, площа перерізу:

$$S = \pi \cdot O_1A^2 = 576\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

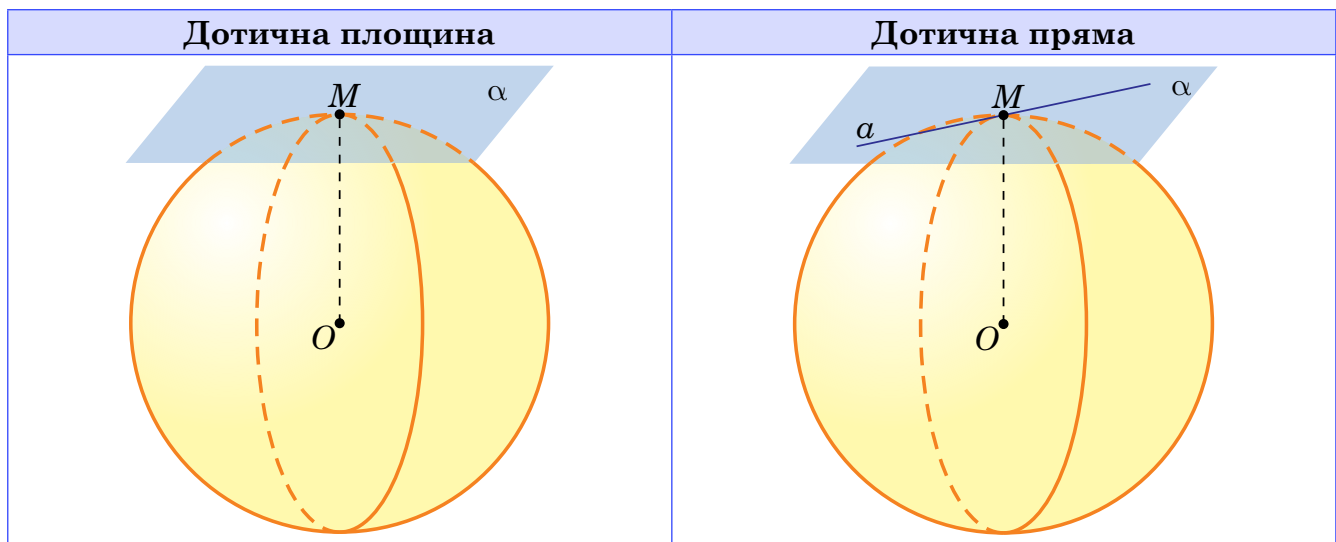
Відповідь. $576\pi \text{ см}^2$.



V. Дотична площина сфери (кулі)

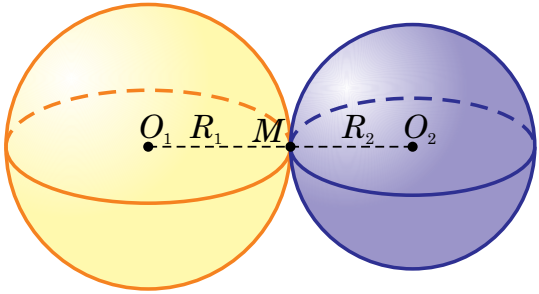
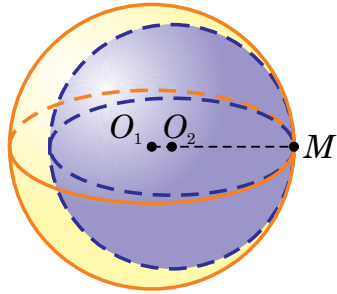
Означення. Площина, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається **дотичною площиною** (див. рисунок).

Означення. Пряма, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається **дотичною прямою** (див. рисунок).



Теорема. Якщо площина або пряма є дотичною до кулі (сфери), то вона перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного у цю точку. І навпаки, якщо площина або пряма проходить через точку сфери і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кулі (сфери).

Дотик двох сфер

Зовнішній дотик	Внутрішній дотик
	
$M \in O_1O_2, O_1O_2 = R_1 + R_2.$	$M \in O_1O_2, O_1O_2 = R_1 - R_2.$

Приклад 2. Куля з центром у точці O дотикається до площини. Точка A лежить у цій площині. Знайдіть відстань від точки A до точки дотику, якщо відстань від точки A до центра кулі дорівнює 25 см, а радіус кулі становить 15 см.

Розв'язання.

1) Нехай точка M є точкою дотику кулі з площиною α і $A \in \alpha$ (див. рисунок).

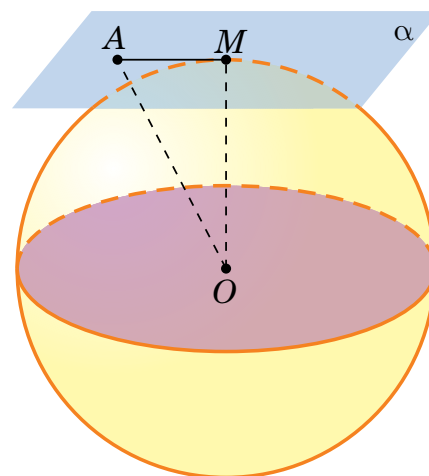
2) $OM \perp \alpha$, за властивістю дотичної площини, тобто $OM \perp MA$.

3) Таким чином, із прямокутного трикутника AMO :

$AM^2 = OA^2 - OM^2$, тобто:

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 20 см.



VI. Формула для обчислення площі сфери

Теорема. Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2.$$

Приклад 3. Переріз кулі площиною, на відстані 4 см від її центра, має площу $9\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання.

1) Знайдемо радіус O_1A перерізу кулі (див. рисунок).

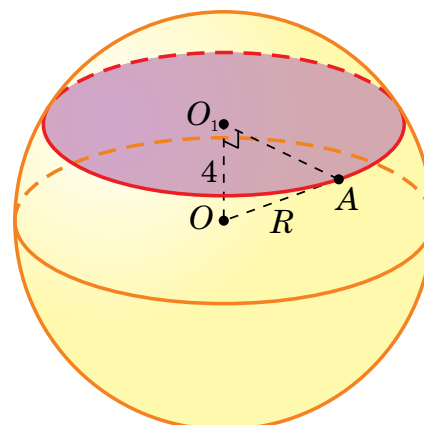
2) $S_{\text{пер}} = 9\pi$, за умовою, $\pi \cdot O_1A^2 = 9\pi$, звідси $O_1A = 3 \text{ см}$.

3) $\triangle AO_1O$ — прямокутний. Тоді $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

тобто: $OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}$.

4) Отже, $R = 5 \text{ см}$ і $S = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь. $100\pi \text{ см}^2$.



9. Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 16π см. Знайдіть радіус сфери.
10. Через кінець діаметра кулі з радіусом R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α , $\alpha \neq 90^\circ$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.
11. Радіус сфери дорівнює 5 см. Обчисліть площу сфери.
12. Радіус кулі збільшили в 7 разів. Як при цьому змінилася площа її поверхні? Як треба змінити радіус кулі, щоб площа її поверхні зменшилася втричі?

Рівень В

1. Доведіть, що коли площина α перетинає сферу із центром O по колу із центром O_1 , то $OO_1 \perp \alpha$.
2. Доведіть, що перерізи сфери площинами, які рівновіддалені від її центра, мають рівні радіуси.
3. Сфера, радіус якої дорівнює R , дотикається до граней двогранного кута, що дорівнює α . Знайдіть відстань від центра сфери до ребра двогранного кута.
4. Вершини прямокутника лежать на сфері з радіусом 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.
5. На поверхні кулі позначено точки A , B і C такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини (ABC) , якщо радіус кулі дорівнює 17 см.
6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої 15 см, дорівнює 18 см. Знайдіть площу кожного із цих перерізів.
7. Яка фігура є геометричним місцем центрів сфер, які:
 - 1) дотикаються до даної площини в даній точці;
 - 2) мають даний радіус і дотикаються до даної площини?
8. Радіус сфери дорівнює 40 см. Точка A , яка належить площині, що дотикається до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 9 см. Знайдіть відстань від точки A до найближчої до неї точки сфери.
9. Дві кулі, радіуси яких дорівнюють 7 см і 9 см, мають спільний центр. Площина α дотикається до меншої кулі. Знайдіть площу перерізу більшої кулі площиною α .
10. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см та дотикаються до даної сфери. Відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.
11. Площа великого круга кулі дорівнює S . Знайдіть площу поверхні даної кулі.
12. Площина, віддалена від центра сфери на 7 см, перетинає сферу по лінії, довжина якої дорівнює 6π см. Знайдіть площу сфери.

Рівень С

1. Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють 64π см² і 100π см².

2. Через точку A проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром O в точках B і C . Площини (AOB) і (AOC) перпендикулярні, $AO = 9$ см, радіус сфери дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками B і C .
3. Скільки метрів тканини завширшки 1 м знадобиться для виготовлення повітряної кулі, радіус якої дорівнює 2 м, якщо на з'єднання деталей кулі та відходи витрачається 10 % тканини? Відповідь округліть до десятих.
4. Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по один бік від її центра, дорівнюють 400π см² і 49π см². Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 9 см.
5. Два перерізи кулі мають тільки одну спільну точку, а їхні площини — перпендикулярні. Радіус одного перерізу дорівнює 5 см, а радіус другого — 12 см. Знайдіть площу поверхні кулі.
6. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в куб, до площі сфери, описаної навколо даного куба.
7. Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Площа повної поверхні циліндра дорівнює S . Знайдіть площу сфери, описаної навколо даного циліндра.
8. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в даний конус, до площі сфери, описаної навколо нього.
9. Гіпотенуза та катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2 .
10. Один із кутів трикутника дорівнює 120° . Сторони трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2 .

Рефлексія

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я можу пояснити, чим відрізняється куля від сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюється куля обертанням півкруга. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як виглядає переріз кулі площиною. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, що таке велике коло та коли воно утворюється. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я можу уявити центр великого круга у кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я можу пояснити, що таке дотична площина до кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | |
|------------|---|------------------------|----|
| 7. | Я розумію, в якій точці площина торкається кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я можу навести приклади тіл, схожих на кулю чи сферу. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я знаю формулу для обчислення площі сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Я вмію застосовувати формулу площі сфери для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Куля та сфера в природі та в техніці.
- 2.** Моделювання кулі з паперу або ниток. Демонстрація перерізів.
- 3.** Відкриття формули площі сфери: від Архімеда до сьогодення.
- 4.** Перерізи кулі як засіб розв'язання практичних задач.







