

Урок 4. Куля та сфера

План уроку

1. Сфера та куля. Куля як тіло обертання.
2. Переріз сфери (кулі) площиною. Ортогональна проєкція центра сфери (кулі) на площину перерізу. Велике коло (великий круг).
3. Дотична площина сфери (кулі).
4. Формула для обчислення площі сфери.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані й зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

подає дані й зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1-1];

за потреби, змінює модель або її компоненти відповідно до особливостей проблемної ситуації [12 МАО 2.3.3-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату [12 МАО 4.2.3-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати упродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Які предмети навколо вас мають форму кулі або сфери?
- 2) Чим, на вашу думку, відрізняється куля від сфери?
- 3) Яка геометрична фігура утворюється в перерізі апельсина або яблука?
- 4) Чи зручно вимірювати розміри кулі лінійкою?
- 5) Коли футбольний м'яч лежить на рівній поверхні землі, то скільки є точок дотику м'яча з поверхнею землі?
- 6) Чи можна порахувати площу поверхні м'яча?

II. Повторення (5 хв)

1. Каркас колеса огляду складається з двох однакових кіл, до яких прикріплено 18 кабінок на однаковій відстані одна від одної, та ребер (радіусів кіл), що з'єднують місця прикріплення кабінок (див. рисунок). Довжина кожного ребра дорівнює 27 м. Визначте довжину дуги AB кола із центром у точці O . Укажіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною каркаса знехтуйте. (ЗНО, 2020 р.).

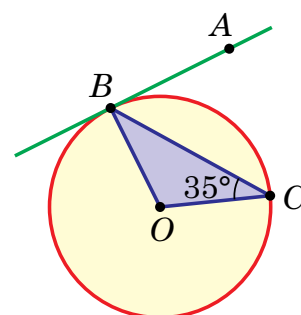


А	Б	В	Г	Д
12,6 м	9,5 м	5,4 м	4,6 м	3,2 м

Відповідь. Б.

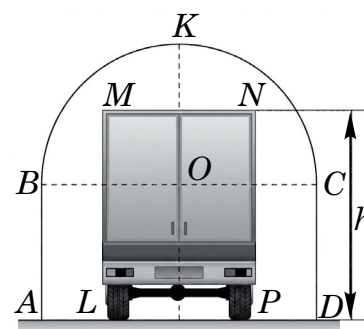
2. До кола з центром у точці O проведено дотичну AB , B — точка дотику (див. рисунок). BC — хорда, що утворює з радіусом кола кут 35° . Знайдіть градусну міру кута ABC .

А	Б	В	Г	Д
35°	45°	55°	65°	70°



Відповідь. В.

3. На рисунку зображено поперечний переріз аркового проїзду, верхня частина якого (дуга BKC) має форму півкола з радіусом $OC = 2$ м. Відрізки AB і DC перпендикулярні до AD , $AB = DC = 2$ м. Яке з наведених значень є найбільшим можливим значенням висоти h вантажівки, за якого вона зможе проїхати через цей арковий проїзд, не торкаючись верхньої частини арки (дуги BKC)? Уважайте, що $LMNP$ — прямокутник, у якому $MN = 2,4$ м і $MN \parallel AD$. (ЗНО, 2017 р.).



А	Б	В	Г	Д
4,4 м	4 м	3,7 м	3,5 м	3,2 м

Відповідь. Г.

4. Озеро Ялпуг є найбільшою природною водоймою в Україні. Його площа становить 149 млн м^2 . Запишіть це число у стандартному вигляді. (НМТ, 2025 р.).

А	Б	В	Г	Д
$14,9 \cdot 10^8$	$14,9 \cdot 10^{-8}$	$1,49 \cdot 10^8$	$149 \cdot 10^6$	$0,149 \cdot 10^8$

Відповідь. В.

5. Два кола, довжини яких дорівнюють 9π см і 36π см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих кіл (у см). (ЗНО, 2010 р.).

Відповідь. 13,5 см.

Як я вирішую певну проблему?

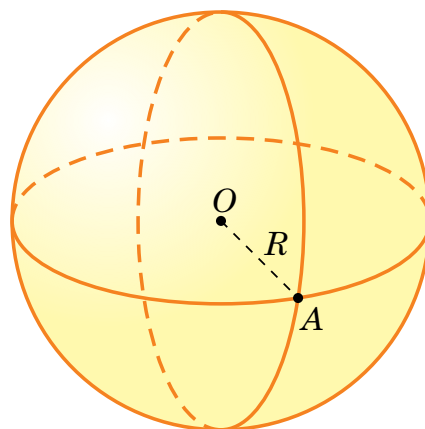
Задача. Біологи створюють полімерне покриття для одного мільйона клітин, кожна з яких має форму сфери з радіусом 10 мікрометрів ($1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$). Полімер подається у кількості одного мілілітра ($1 \text{ мл} = 1 \text{ см}^3$). Чи вистачить 1 мл полімеру для покриття усіх клітин, якщо полімер наноситься шаром завтовшки 100 нм ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$)?



III. Сфера, куля. Куля як тіло обертання (10 хв)

Означення. Сферою називається геометричне тіло, яке складається з усіх точок простору, розташованих на заданій відстані від заданої точки.

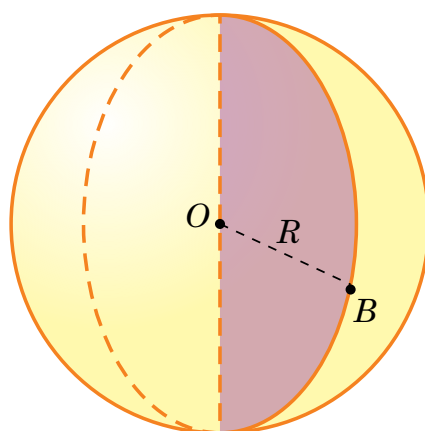
На рисунку зображено сферу. O — центр сфери, $OA = R$ — радіус сфери.



Означення. Сферою називають геометричне тіло, яке утворюється внаслідок обертання півкола навколо його діаметра.

Означення. Кулею називається геометричне тіло, яке складається з усіх точок простору, розташованих на відстані, не більшій за задану, від заданої точки.

На рисунку зображено кулю. O — центр кулі, $OB = R$ — радіус кулі.



Означення. Кулею називають геометричне тіло, яке утворюється внаслідок обертання півкруга навколо його діаметра.

Ілюстративні задачі (5–7 хв)

6. Обчисліть радіус кулі, діаметр якої дорівнює: 1) 2 дм; 2) 5,6 см.

Розв'язання.

1) Якщо $d = 2$ дм, то $r = \frac{d}{2} = 1$ (дм).

2) Якщо $d = 5,6$ см, то $r = \frac{d}{2} = 2,8$ (см).

Відповідь. 1) 1 дм; 2) 2,8 см.

7. Радіус сфери дорівнює 4,5 см. Усередині чи зовні сфери лежить точка А, якщо вона віддалена від центра сфери на: 1) $\sqrt{10}$ см; 2) $\sqrt{21}$ см?

Розв'язання.

1) Оскільки $\sqrt{10} < 4,5$, то точка А розташована всередині сфери.

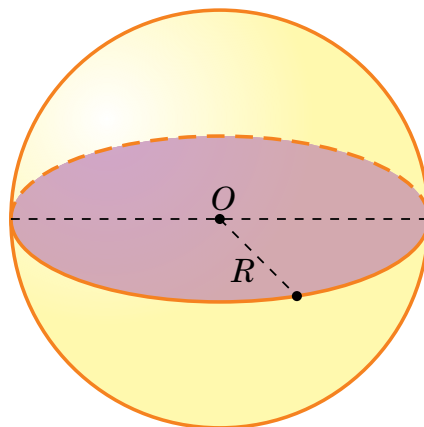
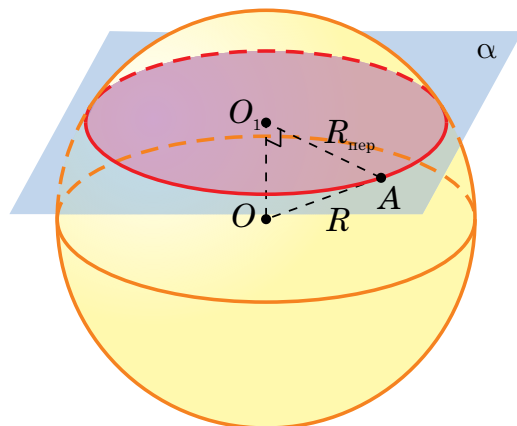
2) Оскільки $\sqrt{21} > 4,5$, то точка А розташована зовні сфери.

Відповідь. 1) Всередині сфери; 2) зовні сфери.

IV. Переріз сфери (кулі) площиною. Ортогональна проєкція центра сфери (кулі) на площину перерізу. Велике коло (великий круг) (8–10 хв)

Будь-який переріз сфери (кулі) площиною є колом (кругом). На рисунку зображено переріз сфери (кулі) з радіусом $OA = R$ площиною α .

Точка O_1 — ортогональна проєкція центра O сфери (кулі) на площину перерізу, $OO_1 = H$ — відстань від центра сфери до площини перерізу. Таким чином, використовуючи теорему Піфагора для трикутника AO_1O , маємо, що радіус перерізу $R_{\text{пер}}$ обчислюється за формулою: $R_{\text{пер}} = \sqrt{R^2 - H^2}$.



Означення. Переріз сфери (кулі), що проходить через центр сфери (кулі), називається **великим колом (великим кругом)** (див. рисунок).

Ілюстративні задачі (7–8 хв)

8. У кулі з радіусом 26 см на відстані 10 см від центра проведено січну площину. Знайдіть площу перерізу.

Розв'язання.

1) Виконаємо побудову (див. рисунок). O — центр кулі, O_1 — центр перерізу, A — точка, на колі, яке обмежує переріз. За умовою, $OA = 26$ см, $OO_1 = 10$ см.

2) Із прямокутного трикутника AO_1O :

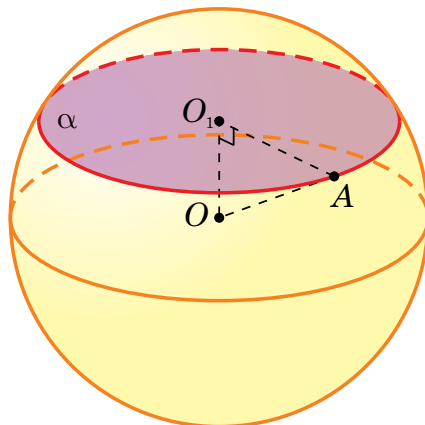
$$O_1A^2 = OA^2 - OO_1^2, \text{ тобто:}$$

$$O_1A = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ (см).}$$

3) Таким чином, площа перерізу:

$$S = \pi \cdot O_1A^2 = 576\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 576π см².



9. Три точки сфери з радіусом 16,25 дм попарно віддалені одна від одної на відстані: 10 дм, 24 дм і 26 дм. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через дані точки.

Розв'язання. І спосіб.

1) Нехай A, B, C — задані точки, O — центр сфери, R — її радіус (див. рисунок). За умовою, задані точки утворюють трикутник, який є прямокутним, оскільки $26^2 = 10^2 + 24^2$.

2) Проведемо $OO_1 \perp (ABC)$, OO_1 — шукана відстань.

3) $OO_1 \perp (ABC)$ і площина трикутника ABC перетинає дану сферу по колу, тоді O_1 — центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Тому точка O_1 — середина гіпотенузи.

$$\text{Тоді радіус кола } r = O_1A = \frac{AB}{2} = 13 \text{ (дм).}$$

4) $OO_1 \perp (ABC)$, тоді $OO_1 \perp O_1A$ і $\triangle OO_1A$ — прямокутний, $\angle AO_1O = 90^\circ$.

$$5) \triangle OO_1A: OO_1^2 = OA^2 - O_1A^2, \text{ тобто: } OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$$6) \text{Отже, } OO_1 = \sqrt{16,25^2 - 13^2} = 9,75 \text{ (дм).}$$

II спосіб. Зауважимо, що розв'язуючи дану задачу, можна було не помітити, що $\triangle ABC$ прямокутний. Аналогічно позначимо O — центр сфери, O_1 — центр перерізу, R — радіус сфери, r — радіус перерізу.

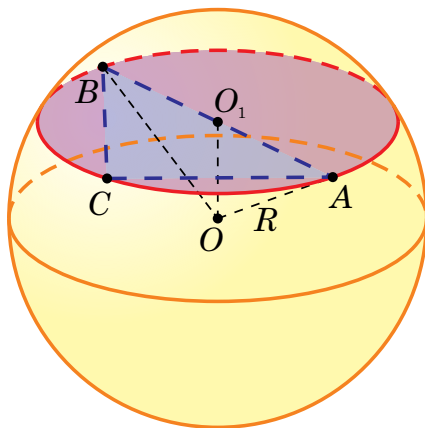
$$1) \triangle OO_1A \text{ — прямокутний: } OO_1^2 = OA^2 - O_1A^2, \text{ тобто: } OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$$2) \triangle ABC: r = \frac{abc}{4S}. \text{ За формулою Герона, } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\text{Тоді } S = \sqrt{30(30-10)(30-24)(30-26)} = 120 \text{ (дм}^2\text{)}, r = \frac{10 \cdot 24 \cdot 26}{4 \cdot 120} = 13 \text{ (дм).}$$

$$3) OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}, OO_1 = \sqrt{16,25^2 - 13^2} = 9,75 \text{ (дм).}$$

Відповідь. 9,75 дм.



- 11.** Січна площина кулі має з його великим кругом лише одну спільну точку. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 6 см, а кут між січною площиною та площиною великого круга становить 30° .

Розв'язання.

1) Нехай O — центр кулі, $R = 6$ см — радіус кулі, α — січна площина, r — радіус перерізу кулі січною площиною (див. рисунок). Точка K є спільною точкою січної площини й великого круга.

2) Проведемо з центра O сфери перпендикуляр OO_1 на січну площину α .

Тоді O_1 — центр перерізу.

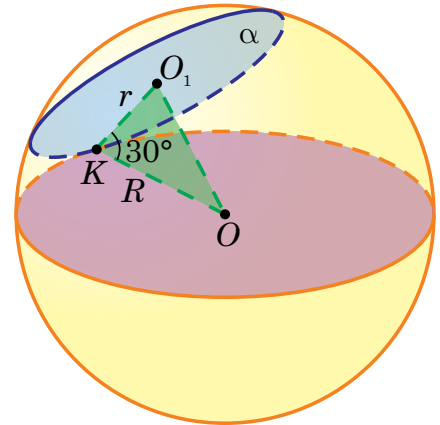
3) Маємо: $OO_1 \perp \alpha$, $OO_1 \perp O_1K$.

4) $\triangle OO_1K$ — прямокутний, тому $\cos \angle OKO_1 = \frac{O_1K}{OK}$,

тобто $r = R \cos 30^\circ$, $r = 3\sqrt{3}$ (см).

5) Отже, площа перерізу кулі площиною α : $S = \pi r^2 = \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 = 27\pi$ (см²).

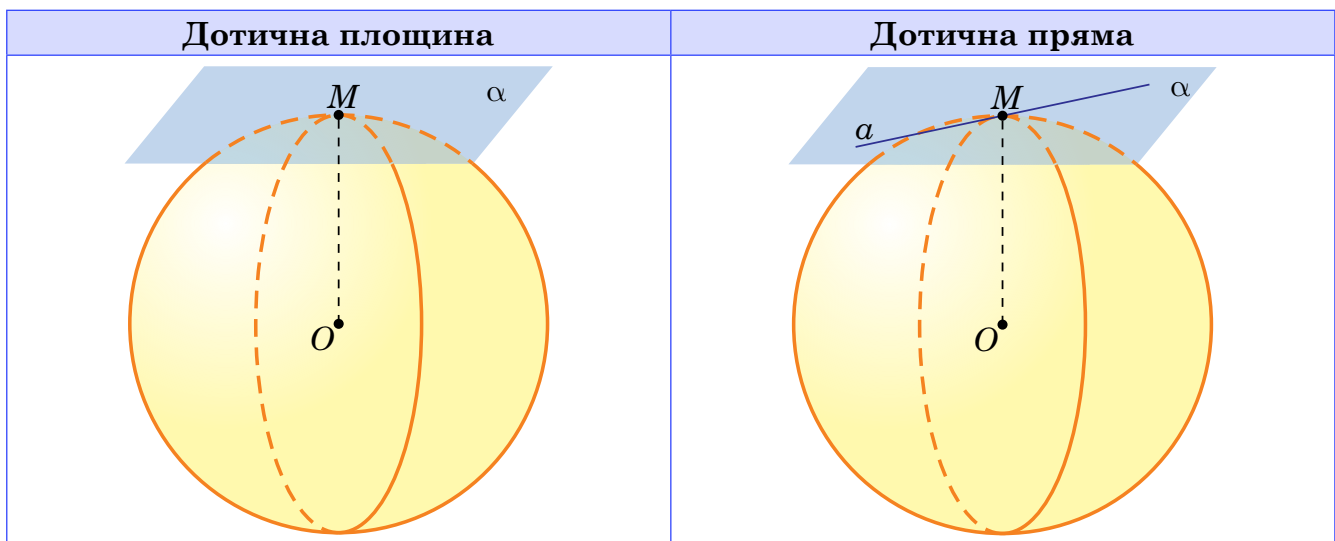
Відповідь. 27π см².



V. Дотична площина сфери (кулі) (5 хв)

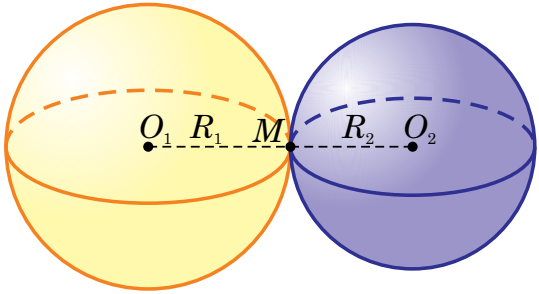
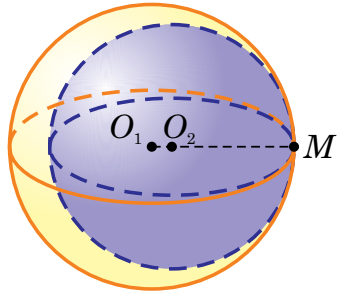
Означення. Площина, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається **дотичною площиною** (див. рисунок).

Означення. Пряма, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається **дотичною прямою** (див. рисунок).



Теорема. Якщо площина або пряма є дотичною до кулі (сфери), то вона перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного у цю точку. І навпаки, якщо площина або пряма проходить через точку сфери і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кулі (сфери).

Дотик двох сфер

Зовнішній дотик	Внутрішній дотик
	
$M \in O_1O_2, O_1O_2 = R_1 + R_2.$	$M \in O_1O_2, O_1O_2 = R_1 - R_2.$

Ілюстративні задачі (5–7 хв)

- 12.** Куля з центром у точці O дотикається до площини. Точка A лежить у цій площині. Знайдіть відстань від точки A до точки дотику, якщо відстань від точки A до центра кулі дорівнює 25 см, а радіус кулі становить 15 см.

Розв'язання.

1) Нехай точка M є точкою дотику кулі з площиною α і $A \in \alpha$ (див. рисунок).

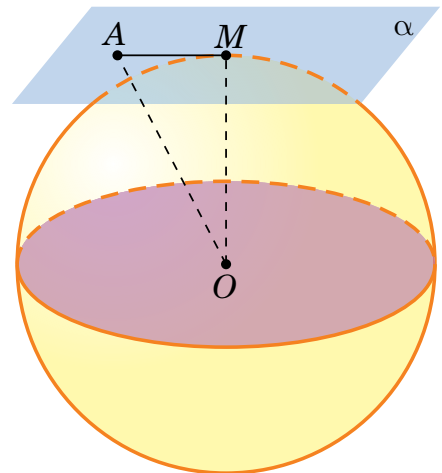
2) $OM \perp \alpha$, за властивістю дотичної площини, тобто $OM \perp MA$.

3) Таким чином, із прямокутного трикутника AMO :

$AM^2 = OA^2 - OM^2$, тобто:

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 20 см.



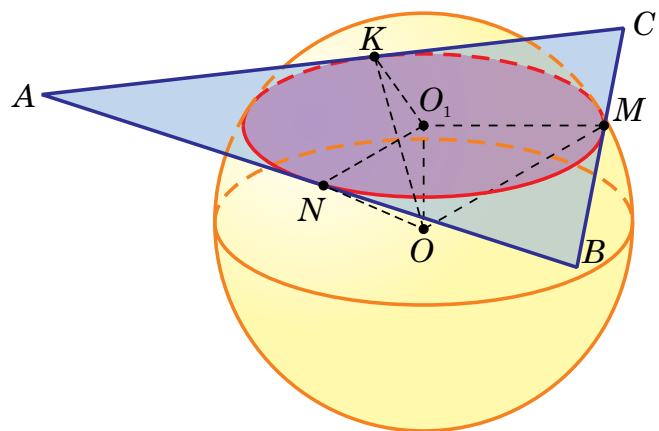
- 13.** Куля з радіусом 5 см дотикається до всіх сторін правильного трикутника зі стороною $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

Розв'язання.

1) Площина правильного трикутника ABC перетинає кулю по колу із центром O_1 (див. рисунок). Оскільки куля дотикається до всіх сторін трикутника, то точки дотику N, M, K зі сторонами AB, BC, AC відповідно лежать у площині цього трикутника.

2) Оскільки $OO_1 \perp (ABC)$, то OO_1 — відстань від центра кулі до площини трикутника ABC .

3) Тоді $ON = OM = OK = 5$ см — радіуси кулі, а відрізки $O_1N = O_1M = O_1K = r$ — радіуси кола із центром у точці O_1 , вписаного у правильний трикутник ABC .



4) Радіус круга, вписаного у правильний трикутник зі стороною $a = 8\sqrt{3}$ см, обчислюється за формулою $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = 4$ (см).

5) Оскільки $\triangle OO_1ON$ — прямокутний, то $OO_1^2 = ON^2 - O_1N^2$, тобто:

$$OO_1 = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 3 см.

VI. Формула для обчислення площі сфери

Теорема. Площа сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2.$$

Ілюстративні задачі (5–7 хв)

- 14.** Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в куб зі стороною a .

Розв'язання.

1) Радіус кулі, вписаної в куб, дорівнює половині ребра куба: $R = \frac{a}{2}$.

2) Отже, $S = 4\pi R^2 = \pi a^2$.

Відповідь. πa^2 .

- 15.** Переріз кулі площиною, на відстані 4 см від її центра, має площу 9π см². Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання.

1) Знайдемо радіус O_1A перерізу кулі (див. рисунок).

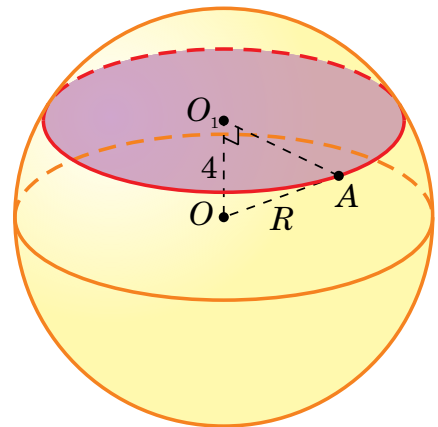
2) $S_{\text{пер}} = 9\pi$, за умовою, $\pi \cdot O_1A^2 = 9\pi$, звідси $O_1A = 3$ см.

3) $\triangle AO_1O$ — прямокутний. Тоді $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

тобто: $OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

4) Отже, $R = 5$ см і $S = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (см²).

Відповідь. 100π см².



5. Знайдіть довжину полярного кола Землі, прийнявши радіус Землі рівним 6400 км. Відповідь округліть до сотень кілометрів.
6. Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ви живете.
7. Скільки площин, що дотикаються до сфери, можна провести через точку, яка:
 - 1) належить цій сфері;
 - 2) розміщена поза сферою?
8. Скільки прямих, що дотикаються до сфери, можна провести через точку, яка:
 - 1) належить цій сфері;
 - 2) розміщена поза сферою?
9. Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 16π см. Знайдіть радіус сфери.
10. Через кінець діаметра кулі з радіусом R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α , $\alpha \neq 90^\circ$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.
11. Радіус сфери дорівнює 5 см. Обчисліть площу сфери.
12. Радіус кулі збільшили в 7 разів. Як при цьому змінилася площа її поверхні? Як треба змінити радіус кулі, щоб площа її поверхні зменшилася втричі?

Рівень В

1. Доведіть, що коли площина α перетинає сферу із центром O по колу із центром O_1 , то $OO_1 \perp \alpha$.
2. Доведіть, що перерізи сфери площинами, які рівновіддалені від її центра, мають рівні радіуси.
3. Сфера, радіус якої дорівнює R , дотикається до граней двогранного кута, що дорівнює α . Знайдіть відстань від центра сфери до ребра двогранного кута.
4. Вершини прямокутника лежать на сфері з радіусом 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.
5. На поверхні кулі позначено точки A , B і C такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини (ABC) , якщо радіус кулі дорівнює 17 см.
6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої 15 см, дорівнює 18 см. Знайдіть площу кожного із цих перерізів.
7. Яка фігура є геометричним місцем центрів сфер, які:
 - 1) дотикаються до даної площини в даній точці;
 - 2) мають даний радіус і дотикаються до даної площини?
8. Радіус сфери дорівнює 40 см. Точка A , яка належить площині, що дотикається до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 9 см. Знайдіть відстань від точки A до найближчої до неї точки сфери.
9. Дві кулі, радіуси яких дорівнюють 7 см і 9 см, мають спільний центр. Площина α дотикається до меншої кулі. Знайдіть площу перерізу більшої кулі площиною α .
10. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см та дотикаються до даної сфери. Відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.

11. Площа великого круга кулі дорівнює S . Знайдіть площу поверхні даної кулі.
12. Площина, віддалена від центра сфери на 7 см, перетинає сферу по лінії, довжина якої дорівнює 6π см. Знайдіть площу сфери.

Рівень С

1. Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють 64π см² і 100π см².
2. Через точку A проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром O в точках B і C . Площини (AOB) і (AOC) перпендикулярні, $AO = 9$ см, радіус сфери дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками B і C .
3. Скільки метрів тканини завширшки 1 м знадобиться для виготовлення повітряної кулі, радіус якої дорівнює 2 м, якщо на з'єднання деталей кулі та відходи витрачається 10 % тканини? Відповідь округліть до десятих.
4. Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по один бік від її центра, дорівнюють 400π см² і 49π см². Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 9 см.
5. Два перерізи кулі мають тільки одну спільну точку, а їхні площини — перпендикулярні. Радіус одного перерізу дорівнює 5 см, а радіус другого — 12 см. Знайдіть площу поверхні кулі.
6. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в куб, до площі сфери, описаної навколо даного куба.
7. Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Площа повної поверхні циліндра дорівнює S . Знайдіть площу сфери, описаної навколо даного циліндра.
8. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в даний конус, до площі сфери, описаної навколо нього.
9. Гіпотенуза та катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2 .
10. Один із кутів трикутника дорівнює 120° . Сторони трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2 .

ІХ. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я можу пояснити, чим відрізняється куля від сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію, як утворюється куля обертанням півкруга. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як виглядає переріз кулі площиною. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | |
|------------|---|------------------------|----|
| 4. | Я розумію, що таке велике коло та коли воно утворюється. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я можу уявити центр великого круга у кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я можу пояснити, що таке дотична площина до кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, в якій точці площина торкається кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я можу навести приклади тіл, схожих на кулю чи сферу. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я знаю формулу для обчислення площі сфери. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Я вмію застосовувати формулу площі сфери для розв'язування задач. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Куля та сфера в природі та в техніці.
- 2.** Моделювання кулі з паперу або ниток. Демонстрація перерізів.
- 3.** Відкриття формули площі сфери: від Архімеда до сьогодення.
- 4.** Перерізи кулі як засіб розв'язання практичних задач.

Список використаної літератури

- 1) Бевз Г. П. Геометрія: 11 кл. : підручн. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. — К. : Генеза, 2011.
- 2) Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень: підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, — К.: УОВЦ «Оріон», 2020.
- 3) Істер О. С. Геометрія: (профіл. рівень) : підручн. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019.
- 4) Ключко І. Я. Математика. Геометрія ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2024.
- 5) Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019.
- 6) Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручн. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019.