

Урок 5. Частини кулі. Перетин двох сфер (куль)

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

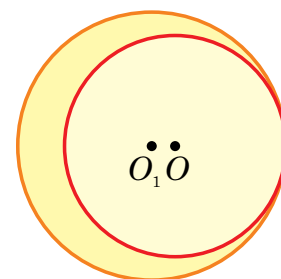
На уроці ви навчитеся:

- 1) розпізнавати та описувати варіанти взаємного розташування двох сфер;
- 2) визначати за рисунками та моделями фігур, яка частина кулі утворюється в результаті перерізу площиною чи кількома площинами;
- 3) пояснювати, що таке кульовий та сферичний сегменти, кульовий сектор, кульовий шар і сферичний пояс, та знаходити площі їхніх поверхонь;
- 4) застосовувати формули для обчислення площ поверхонь частин кулі в задачах;
- 5) використовувати 3D-моделі або рисунки для візуалізації частин кулі та їхнього взаємного розташування.

II. Повторення (4–5 хв)

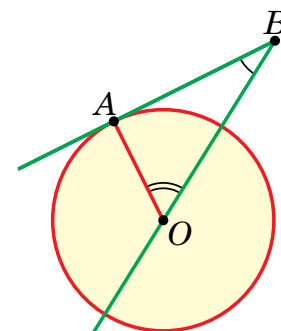
1. Два кола з центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1 , якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см. (ЗНО, 2012 р.).

А	Б	В	Г	Д
1,5 см	2 см	3 см	4 см	8 см



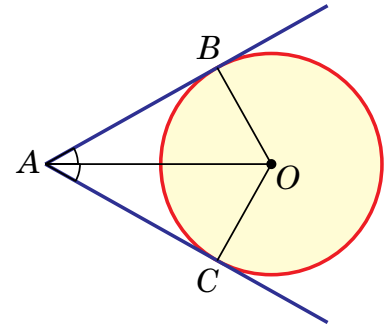
2. До кола з центром у точці O проведено дотичну AB з точкою дотику A . Знайдіть величину кута OBA , якщо $\angle OBA : \angle BOA = 1 : 4$ (див. рисунок).

А	Б	В	Г	Д
15°	18°	25°	30°	75°

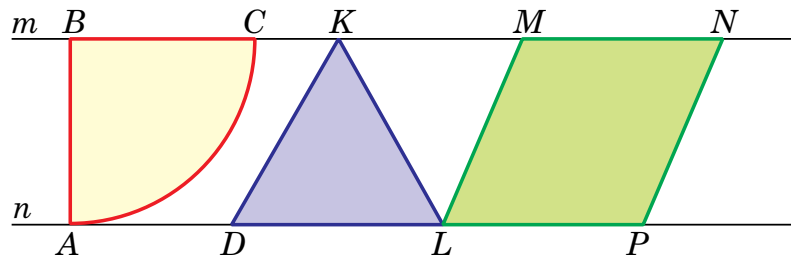


3. До кола з центром у точці O проведено дотичні AB і AC так, що $\angle BAC = 60^\circ$ (див. рисунок). Обчисліть радіус кола, якщо $AO = 7$ см.

А	Б	В	Г	Д
3 см	3,5 см	4 см	4,5 см	7 см



4. На паралельних прямих n і m розміщено круговий сектор ABC , рівнобедрений трикутник DKL ($DK = KL$) та паралелограм $LMNP$ (див. рисунок). Площа сектора ABC дорівнює 64π см², площа паралелограма $LMNP$ дорівнює 288 см², $DK = 20$ см. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д). (НМТ, 2025 р.).



Відрізок

1 AB

2 DL

3 LP

Довжина відрізка

А 12 см

Б 16 см

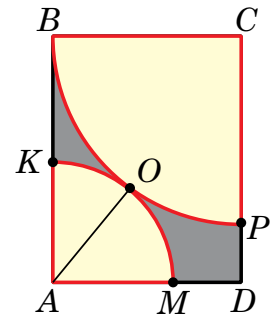
В 18 см

Г 20 см

Д 24 см

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

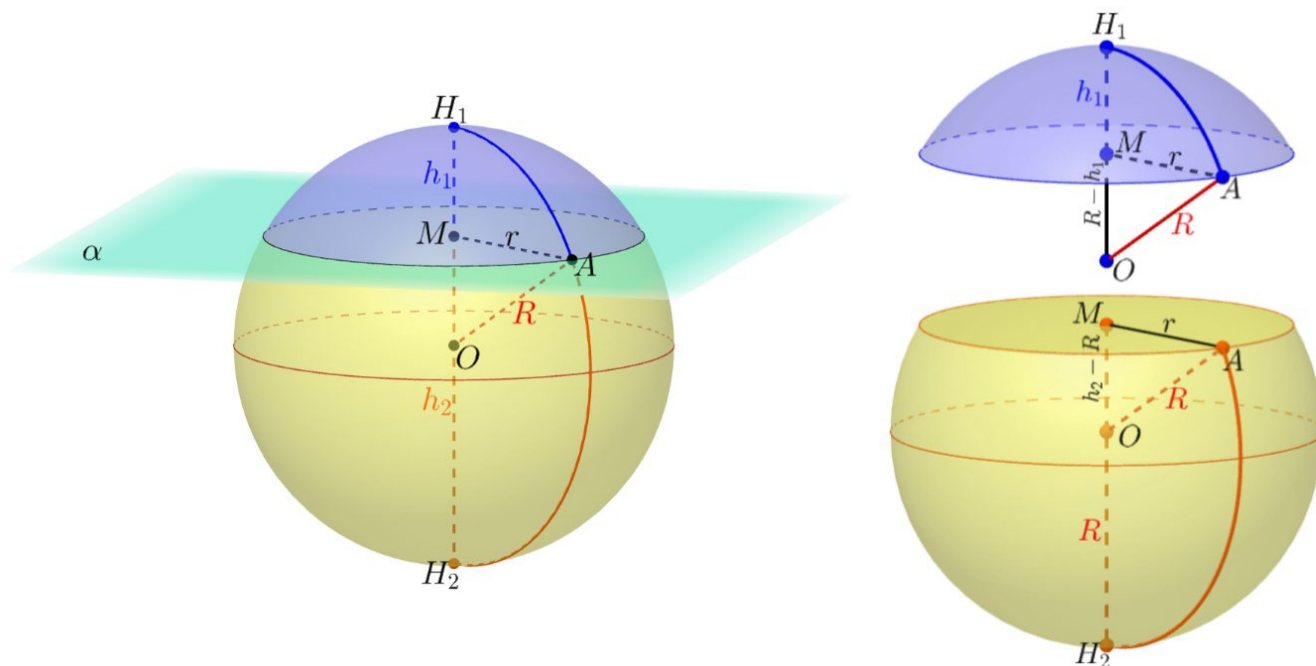
5. На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ і кругові сектори KAM та BSP , що мають одну спільну точку O . Площа сектора BSP дорівнює 9π см², $AO = 4$ см. (ЗНО, 2017 р., додаткова сесія).
- Визначте радіус сектора BSP (у см).
 - Обчисліть площу прямокутника $ABCD$ (у см²).
- Відповідь. 1. 6 см. 2. 48 см².



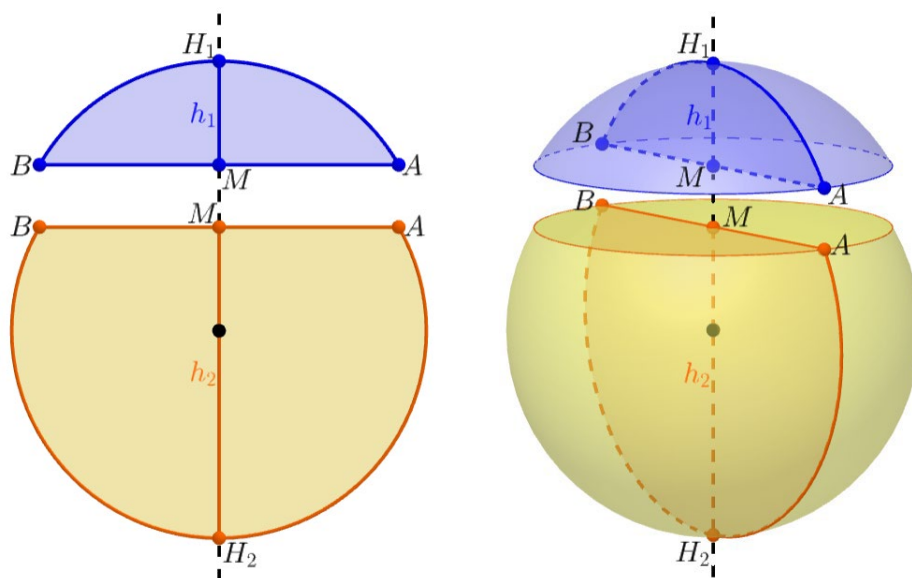
III. Кульовий сегмент

Означення. *Кульовим сегментом* називають частину кулі, яку відтинає від неї січна площина. Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга — *основи кульового сегмента*. Частина радіуса кулі, яка лежить усередині кульового сегмента і перпендикулярна до його основи, називається *висотою кульового сегмента*.

На рисунках зображено два кульові сегменти, на які площина α поділяє кулю з центром O та з радіусом R . Круг із центром M та з радіусом $MA = r$ є основою цих сегментів, а відрізки $MH_1 = h_1$ та $MH_2 = h_2$ — висоти кожного з них.



Зауважимо, що осьовим перерізом кульового сегмента є круговий сегмент (див. рисунки).

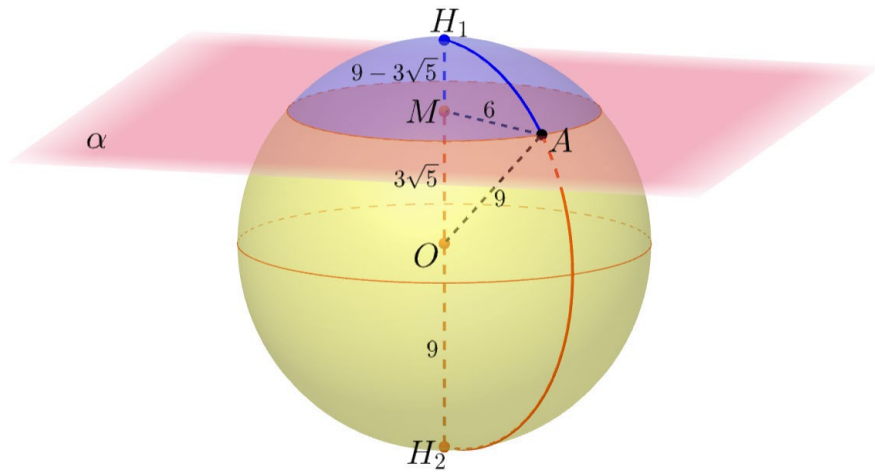


Означення. Кульовим сегментом називають геометричне тіло, що утворилось внаслідок обертання кругового сегмента навколо його осі симетрії.

Приклад 1. Знайдіть висоти двох кульових сегментів, на які деяка куля розбивається площиною α , якщо радіус кулі дорівнює 9 см, а радіус перерізу кулі вказаною площиною становить 6 см.

Розв'язання.

1) Нехай куля з центром O перетинається площиною α по колу з центром у точці M (див. рисунок). Точка A — довільна точка на колі, що обмежує переріз цієї кулі площиною α . За умовою, $OA = 9$ см, $MA = 6$ см.



2) $\triangle OMA$ — прямокутний ($OM \perp \alpha$, $OM \perp MA$).

Тоді $OM^2 = OA^2 - MA^2$, $OM = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$ (см).

3) Висота меншого сегмента: $MH_1 = OH_1 - OM = 9 - 3\sqrt{5}$ (см).

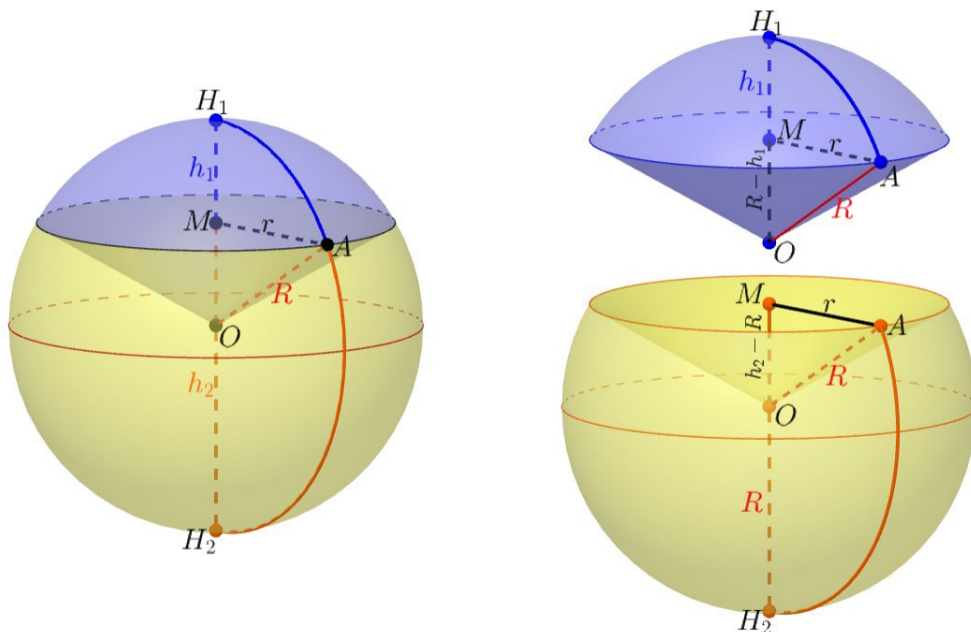
Висота більшого сегмента: $MH_2 = OH_2 + OM = 9 + 3\sqrt{5}$ (см).

Відповідь. $9 - 3\sqrt{5}$ см, $9 + 3\sqrt{5}$ см.

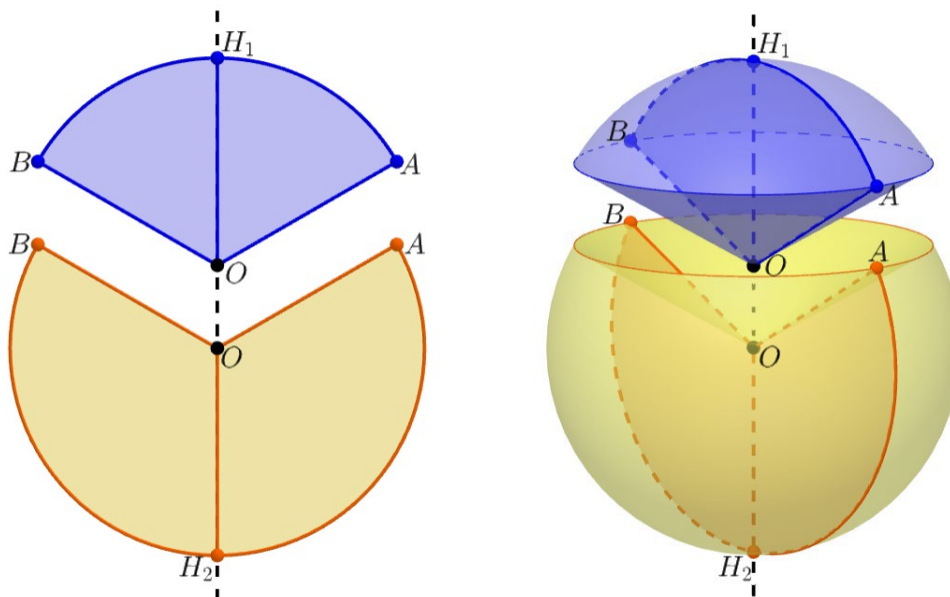
IV. Кульовий сектор

Означення. Кульовим сектором називають частину кулі, утворену з кульового сегмента і конуса, основою якого є основа кульового сегмента, а вершиною — центр кулі.

На рисунках зображено два кульові сектори, на які поділяється куля з центром O та з радіусом R . Якщо відповідний кульовий сегмент менший за півкулю (сегмент з висотою $MH_1 = h_1$), то його доповнюють конусом (конус з висотою $OM = R - h_1$). Якщо відповідний кульовий сегмент більший за півкулю (сегмент з висотою $MH_2 = h_2$), то конус із кульового сегмента вилучають. У такому випадку висота цього конуса $OM = h_2 - R$.



Зауважимо, що осьовим перерізом кульового сектора є круговий сектор (див. рисунок).



Означення. Кульовим сектором називають геометричне тіло, що утворилось внаслідок обертання кругового сектора навколо його осі симетрії.

Приклад 2. Знайдіть висоту конуса, бічною поверхнею якого є спільна частина двох кульових секторів, які утворюють кулю, якщо висоти відповідних кульових сегментів для цих секторів дорівнюють 0,4 дм і 1,2 дм.

Розв'язання.

1) Виконаємо побудову (див. рисунок). За умовою, $MH_1 = 0,4$ дм, $MH_2 = 1,2$ дм. Знайдемо довжину OM .

2) Нехай $OM = x$ дм, $MH_1 = 0,4$ дм.

Тоді $OH_2 = OH_1 = x + 0,4$ дм, як радіуси кулі.

3) Оскільки $MH_2 = 1,2$ дм, за умовою, то маємо рівняння:

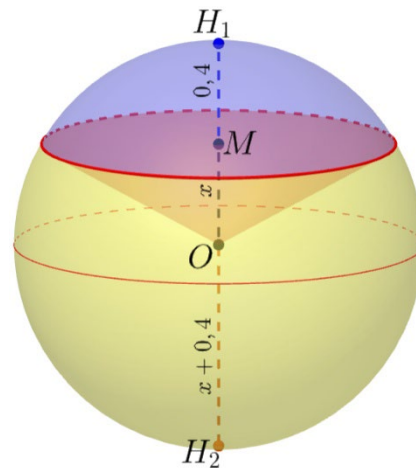
$$x + (x + 0,4) = 1,2,$$

$$2x + 0,4 = 1,2,$$

$$2x = 0,8, x = 0,4.$$

4) Отже, $OM = 0,4$ дм — висота вказаного конуса.

Відповідь. 0,4 дм.

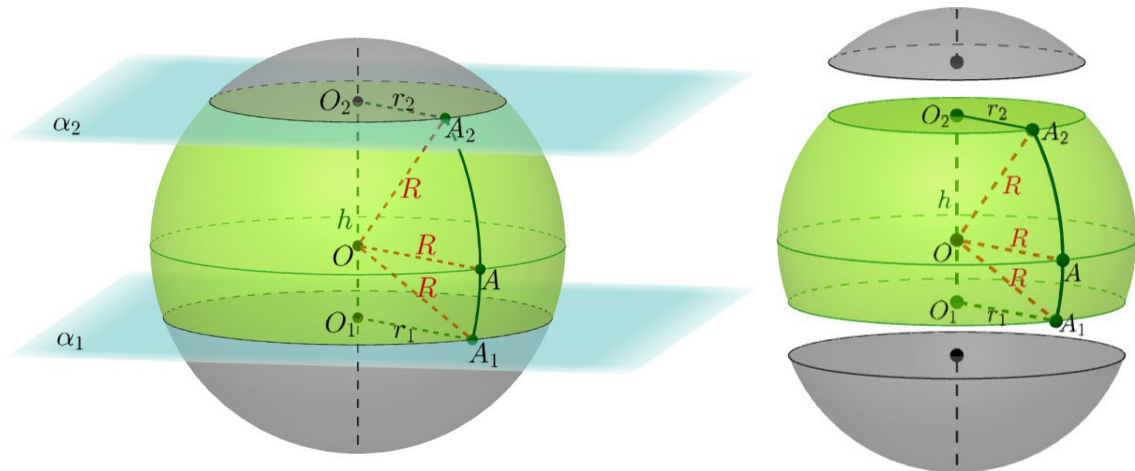


V. Кульовий шар

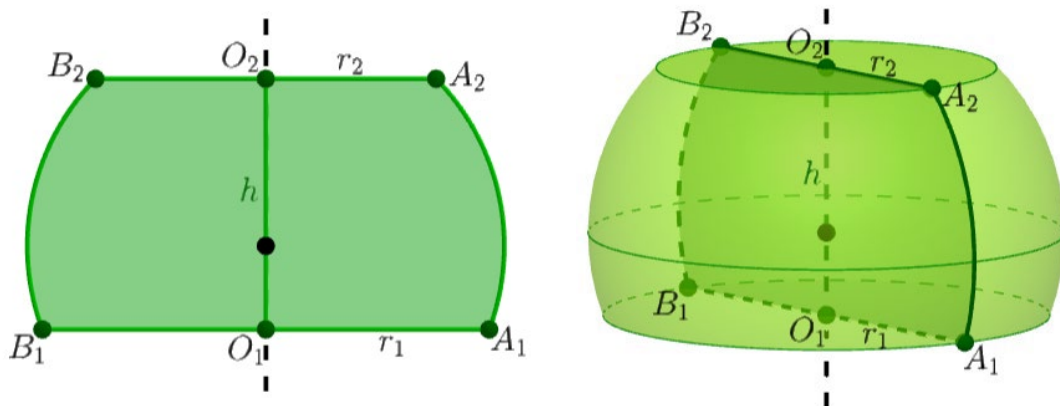
Означення. Кульовим шаром називають частину кулі, що міститься між двома паралельними січними площинами. Перерізи кулі цими площинами називаються *основами кульового шару*, а відстань між ними — *висотою кульового шару*.

На рисунку зображено кульовий шар, що відтинається площинами α_1 та α_2 від кулі з центром O та з радіусом $OA = OA_1 = OA_2 = R$. Круг із центром O_1 та з радіусом $O_1A_1 = r_1$,

і круг із центром O_2 та з радіусом $O_2A_2 = r_2$ є основами кульового шару, а $O_1O_2 = h$ — його висотою.



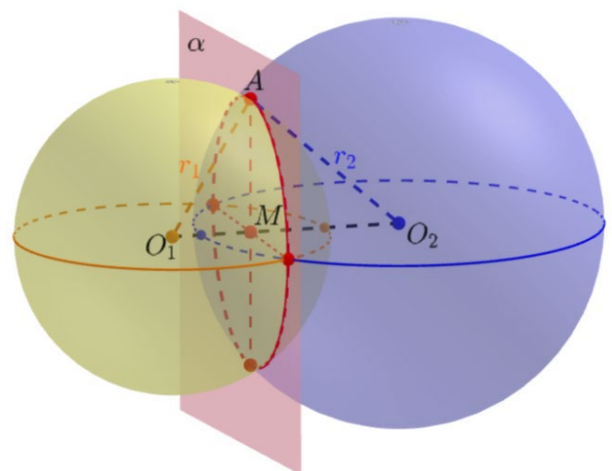
Осьовим перерізом кульового шару є круговий шар — частина круга, що міститься між двома його паралельними хордами (див. рисунок).



Означення. *Кульовим шаром* називають геометричне тіло, яке утворилось внаслідок обертання кругового шару навколо його осі симетрії.

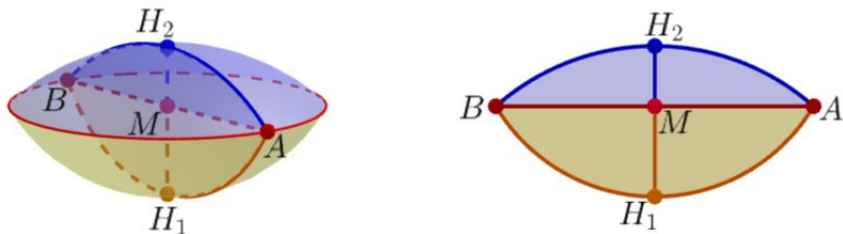
VI. Лінія перетину двох сфер. Перетин двох куль

Нехай дві сфери з центрами O_1 та O_2 перетинаються так, що точка A — їхня спільна точка (див. рисунок). Проведемо через точку A площину α , перпендикулярну до O_1O_2 . Тоді, $O_1O_2 \cap \alpha = M$. За теоремою про переріз кулі площиною, площина α перетинає обидві сфери по колу з центром у точці M і з радіусом MA . Отже, дане коло є лінією перетину двох сфер. Інших точок перетину, крім точок отриманого кола, сфери не мають.



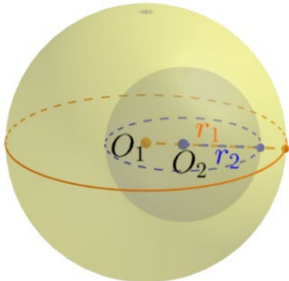
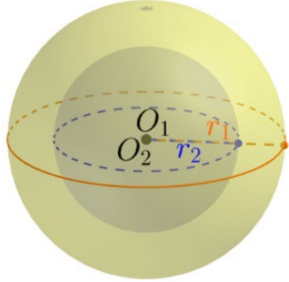
Теорема. Якщо дві сфери перетинаються, то лінія їхнього перетину є колом.

Зауважимо, що *перетином двох куль* є геометричне тіло, утворене двома кульовими сегментами, що мають рівні основи (див. рисунок).

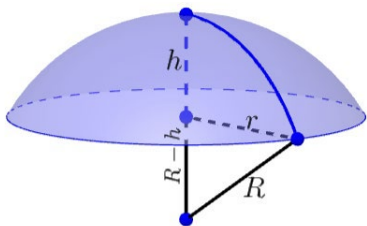
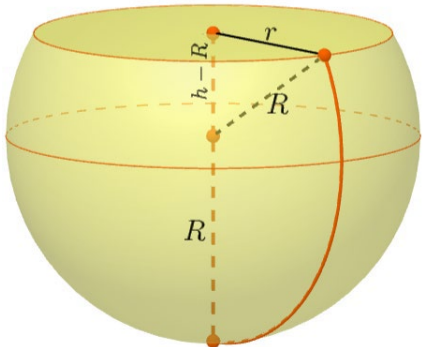


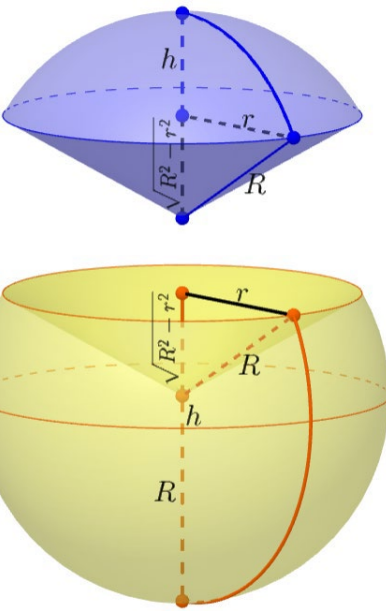
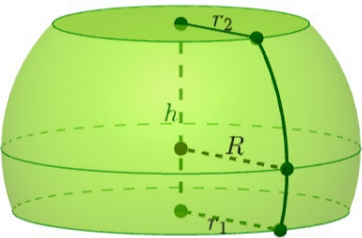
У таблиці відображено випадки взаємного розташування двох сфер та співвідношення між радіусами цих сфер та відстанню між їхніми центрами.

Взаємне розміщення двох сфер	Відстань між центрами d	Рисунок
Сфери лежать одна поза одною та не мають спільних точок.	$d > r_1 + r_2 $	$O_1O_2 = d$
Сфери дотикаються зовні.	$d = r_1 + r_2 $	$O_1O_2 = d$
Сфери перетинаються.	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2 $	$O_1O_2 = d$
Сфери дотикаються внутрішньо.	$d = r_1 - r_2 $	$O_1O_2 = d$

Взаємне розміщення двох сфер	Відстань між центрами d	Рисунок
Одна сфера розміщена всередині іншої так, що спільних точок немає.	$d < r_1 - r_2 $	$O_1O_2 = d$ 
Сфери є концентричними.	$d = 0$	$O_1O_2 = d$ 

VII. Обчислювальні формули для частин сфери та кулі (5 хв)

Тіло	Поверхня	Площа поверхні
Кульовий сегмент  	Сферичний сегмент	$S = 2\pi Rh$, R — радіус сфери, h — висота сферичного сегмента.
	Поверхня кульового сегмента	$S = 2\pi Rh + \pi r^2$, R — радіус кулі, h — висота сегмента, r — радіус основи сегмента.

Тіло	Поверхня	Площа поверхні
<i>Кульовий сектор</i> 	Поверхня кульового сектора	1) $S = \pi R(2h + r)$, де: R — радіус кулі, h — висота сегмента, r — радіус основи сегмента. 2) $S = 2\pi R \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \right)$, площа сегмента меншого від півкулі; $S = 2\pi R \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \right)$, площа сегмента більшого за півкулю, де: R — радіус кулі, r — радіус основи сегмента.
<i>Кульовий шар</i> 	Сферичний пояс	$S = 2\pi Rh$, де: R — радіус сфери, h — висота сферичного пояса.
	Поверхня кульового шару	$S = 2\pi Rh + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$, де: R — радіус шару, h — висота кульового шару, r_1, r_2 — радіуси основ шару.

VIII. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Макет планети має радіус 12 см. Точкове джерело світла, яке імітує Сонце, розташоване за межами цього макета. На якій відстані від макета треба розташувати лампу, щоб вона освітлювала тільки третину його поверхні?

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

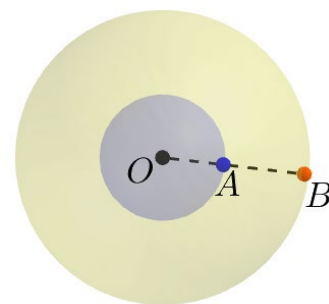
Рівень А

- Куля з радіусом 3,2 см перетинається площиною β . Висота одного з утворених кульових сегментів становить 1,9 см. Знайдіть висоту іншого кульового сегмента.
- Знайдіть площу осевого перерізу півкулі з діаметром 2 см.
- Радіус $OB = 5,6$ см кулі з центром O перетинає поверхню концентричної кулі в точці A . Знайдіть радіус другої кулі, якщо $AB = 1,2$ см.
- Дві сфери з радіусами 5 см і 3 см мають лише одну спільну точку. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

5. Дві сфери з діаметрами 6 см і 14 см лежать одна поза одною і не мають спільних точок. Знайдіть відстань між цими сферами, якщо довжина відрізка, що з'єднує їхні центри становить 13 см.
6. Відстань між центрами двох куль дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих куль, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.
7. Радіуси двох концентричних сфер дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть довжини відрізків, на які діаметр більшої сфери ділиться меншою сферою.
8. Сферичний сегмент, висота якого становить 1 см, відтинається від сфери з радіусом 6 см. Знайдіть площу поверхні даного сферичного сегмента.
9. Радіус кулі дорівнює 10 см, а висота її сегмента становить 3 см. Знайдіть:
1) площу поверхні кульового сегмента;
2) площу поверхні кульового сектора, що відповідає даному сегменту.
10. Сферичний пояс, висотою 6 см, відтинається від сфери з радіусом 10 см. Знайдіть площу поверхні даного сферичного пояса.
11. Основи кульового шару віддалені на 2 см і 9 см від центра кулі. Знайдіть висоту кульового шару.
12. Дві паралельні площини, що розташовані на відстані 6 см від центра кулі з радіусом 10 см, відтинають від неї два однакові сегменти. Знайдіть площу поверхні тіла, що утворилось.

Рівень В

1. Чи перетинаються дві кулі з діаметрами 10 дм і 14 дм, якщо відстань між їхніми центрами:
1) 60 см; 2) 130 см?
2. Відстань між центрами сфер із радіусами $R_1 = 8$ см та $R_2 = 6$ см дорівнює 10 см. Знайдіть площу круга, який обмежує коло в перетині даних сфер.
3. Дві сфери мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 12 дм. Знайдіть радіуси цих сфер, якщо вони відносяться, як 2 : 5.
4. Дві сфери мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 15 см. Знайдіть радіуси сфер, якщо вони відносяться, як 2 : 3.
5. Точки C і D — діаметрально протилежні точки кола, яке є перетином двох сфер із центрами в точках O_1 і O_2 . Доведіть, що промінь O_1O_2 — бісектриса кута CO_1D .
6. На рисунку зображено концентричні сфери з центром у точці O , $AB = 8$ см. Знайдіть радіуси сфер, якщо вони відносяться, як 3 : 7.



7. Площа поверхні кульового сегмента становить 72π см², радіус кулі $R = 6$ см. Знайдіть висоту сегмента.

8. Площа сферичного сегмента відноситься до площі сфери, частиною якої він є, як $5 : 8$. Знайдіть радіус сфери, якщо висота вказаного сегмента на 1 см більша за радіус цієї сфери.
9. Осьовим перерізом кульового сектора є круговий сектор з радіусом R та центральним кутом 60° . Знайдіть площу поверхні кулі, частиною якої є даний сектор.
10. Вершина конуса є центром кулі з радіусом 13 см, а його основа — перерізом даної кулі. Знайдіть площі кульових секторів, які утворилися.
11. Дві сфери з центрами O_1 та O_2 дотикаються зовнішнім або внутрішнім чином у точці A . Доведіть, що точка A належить прямій O_1O_2 .
12. Дві паралельні площини перетинають сферу по рівних між собою колах, з радіусами 3 см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 8 см.

Рівень С

1. Три сфери попарно дотикаються зовні. Радіус однієї зі сфер дорівнює 7 см, а відрізок, що з'єднує центри двох інших сфер, дорівнює 9 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих сфер.
2. Дві рівні сфери, що дотикаються одна до одної, внутрішньо дотикаються до третьої сфери. Сполучивши їхні центри, отримуємо трикутник з периметром 18 см. Визначте радіус більшої сфери.
3. У кулі проведено два паралельні перерізи, менший з яких дорівнює 81π см². Діаметр кулі, що проходить через центри даних перерізів, ділиться ними у відношенні $2 : 7 : 1$. Знайдіть площі поверхонь меншого з кульових сегментів та кульового шару між площинами цих сегментів.
4. Висота кульового шару дорівнює 7 см, а різниця радіусів його основ — 17 см. Знайдіть площі основ даного кульового шару, якщо радіус кулі дорівнює 65 см.
5. Круговий сектор із кутом 30° і радіусом R обертається навколо одного з крайніх радіусів. Знайдіть відношення висоти кульового сектора до його радіуса.
6. Діаметри основ кульового шару дорівнюють 6 см і 8 см, а його висота становить 7 см. Знайдіть площу осьового перерізу даного кульового шару.
7. Доведіть, що відношення площі сферичного сегмента до площі всієї сфери дорівнює відношенню висоти вказаного сегмента до діаметра сфери.
8. Радіус сфери дорівнює R , а висоти двох сферичних поясів h_1 і h_2 задовольняють умову $h_1 + h_2 = R$. Доведіть, що сума площ цих поясів менша за площу всієї сфери.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

- 1.** Моделювання взаємного розміщення двох, трьох та більшої кількості сфер. Розв'язування задач.
- 2.** Вимірювання площ поверхонь кульових частин у домашніх предметах, наприклад, чашах, лампах, елементах декору тощо.
- 3.** Дослідницький STEM-проєкт: моделювання кульових частин засобами GeoGebra.







