

### Урок 5. Частини кулі. Перетин двох сфер (куль)

#### План уроку

1. Кульовий сегмент.
2. Кульовий сектор.
3. Кульовий шар.
4. Лінія перетину двох сфер. Перетин двох куль.
5. Обчислювальні формули для частин сфери та кулі.

#### Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виокремлює в конкретній комплексній проблемній ситуації її складові частини, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1-2];

подає дані й зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

прогнозує межі й точність результатів розв'язання проблемної ситуації та можливі форми їхнього представлення [12 МАО 1.3.1-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3-2];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1].

#### Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Створення проектів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Тематику проектів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проекту вони можуть обрати рівень В або рівень С. Можливі теми для створення проектів запропоновані.
- 11) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

## I. Організаційна частина (2 хв)

### Мотиваційні запитання

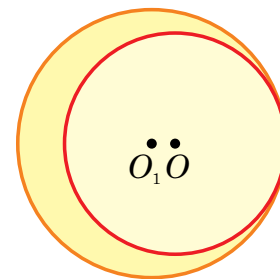
- 1) Уявіть, що ви розрізаєте апельсин (не обов'язково навпіл). Чи зміниться форма зрізу, якщо різати його під різними кутами? Які геометричні форми утворяться після одного розрізу?
- 2) Якщо розрізати апельсин двома паралельними розрізами, то яку геометричну форму нагадують вам частини, що утворилися в результаті?
- 3) Якщо дві мильні бульбашки перетнуться, то яку геометричну фігуру утворює їхня лінія перетину?
- 4) Якщо бенто-торт кулястої форми розрізати на рівні частини трьома взаємно перпендикулярними розрізами, то скільки частин утвориться?
- 5) Чи можуть дві сфери мати лише одну спільну точку?
- 6) Чи можна так розташувати дві кулі, щоб одна була повністю всередині іншої, але їхні поверхні не дотикалися?

## II. Повторення (4–5 хв)

1. Два кола з центрами в точках  $O$  і  $O_1$  мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань  $OO_1$ , якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см. (ЗНО, 2012 р.).

| А      | Б    | В    | Г    | Д    |
|--------|------|------|------|------|
| 1,5 см | 2 см | 3 см | 4 см | 8 см |

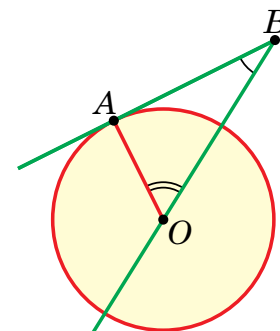
Відповідь. Г.



2. До кола з центром у точці  $O$  проведено дотичну  $AB$  з точкою дотику  $A$ . Знайдіть величину кута  $OBA$ , якщо  $\angle OBA : \angle BOA = 1 : 4$  (див. рисунок).

| А          | Б          | В          | Г          | Д          |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| $15^\circ$ | $18^\circ$ | $25^\circ$ | $30^\circ$ | $75^\circ$ |

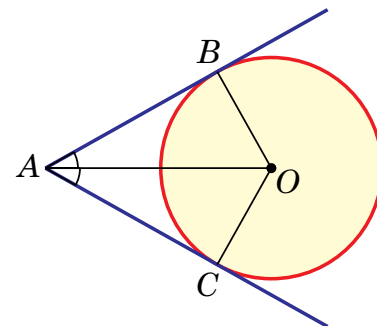
Відповідь. Б.



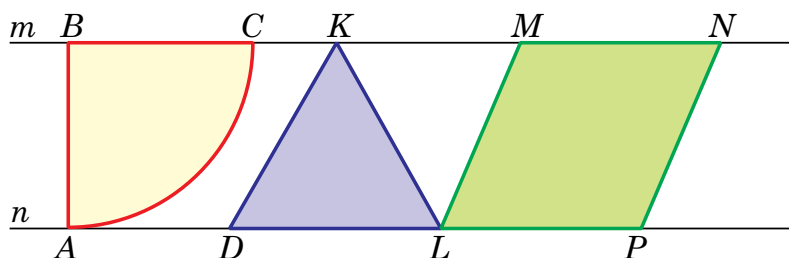
3. До кола з центром у точці  $O$  проведено дотичні  $AB$  і  $AC$  так, що  $\angle BAC = 60^\circ$  (див. рисунок). Обчисліть радіус кола, якщо  $AO = 7$  см.

| А    | Б      | В    | Г      | Д    |
|------|--------|------|--------|------|
| 3 см | 3,5 см | 4 см | 4,5 см | 7 см |

Відповідь. Б.



4. На паралельних прямих  $n$  і  $m$  розміщено круговий сектор  $ABC$ , рівнобедрений трикутник  $DKL$  ( $DK = KL$ ) та паралелограм  $LMNP$  (див. рисунок). Площа сектора  $ABC$  дорівнює  $64\pi$  см<sup>2</sup>, площа паралелограма  $LMNP$  дорівнює 288 см<sup>2</sup>,  $DK = 20$  см. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Д). (НМТ, 2025 р.).



Відрізок

- 1  $AB$   
2  $DL$   
3  $LP$

Довжина відрізка

- А 12 см  
Б 16 см  
В 18 см  
Г 20 см  
Д 24 см

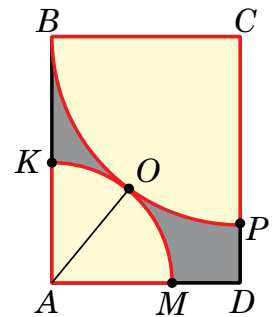
|   | А                        | Б                        | В                        | Г                        | Д                        |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Відповідь. 1 – Б; 2 – Д; 3 – В.

5. На рисунку зображено прямокутник  $ABCD$  і кругові сектори  $KAM$  та  $BCP$ , що мають одну спільну точку  $O$ . Площа сектора  $BCP$  дорівнює  $9\pi \text{ см}^2$ ,  $AO = 4 \text{ см}$ . (ЗНО, 2017 р., додаткова сесія).

1. Визначте радіус сектора  $BCP$  (у см).
2. Обчисліть площу прямокутника  $ABCD$  (у  $\text{см}^2$ ).

Відповідь. 1. 6 см. 2.  $48 \text{ см}^2$ .



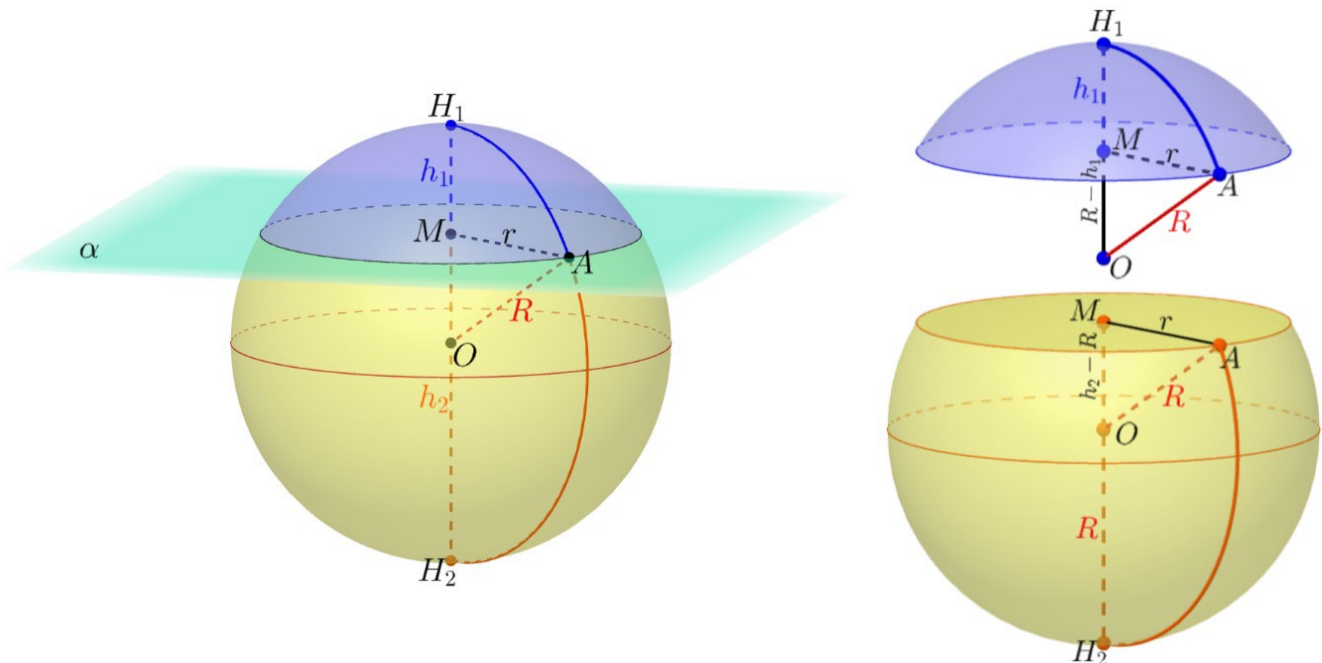
### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Макет планети має радіус 12 см. Точкове джерело світла, яке імітує Сонце, розташоване за межами цього макета. На якій відстані від макета треба розташувати лампу, щоб вона освітлювала тільки третину його поверхні?

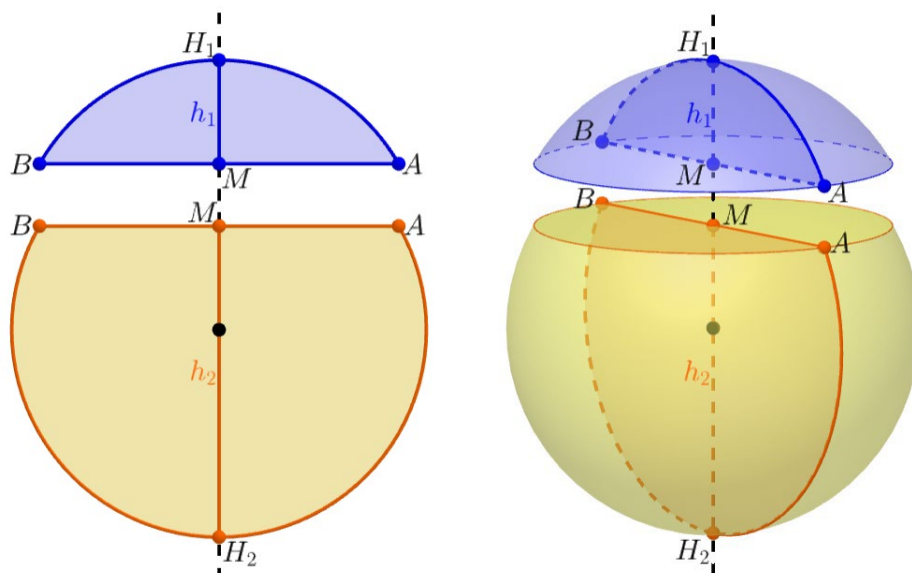
## III. Кульовий сегмент (5–7 хв)

**Означення.** *Кульовим сегментом* називають частину кулі, яку відтинає від неї січна площина. Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга — *основи кульового сегмента*. Частина радіуса кулі, яка лежить усередині кульового сегмента і перпендикулярна до його основи, називається *висотою кульового сегмента*.

На рисунках зображено два кульові сегменти, на які площина  $\alpha$  поділяє кулю з центром  $O$  та з радіусом  $R$ . Круг із центром  $M$  та з радіусом  $MA = r$  є основою цих сегментів, а відрізки  $MH_1 = h_1$  та  $MH_2 = h_2$  — висоти кожного з них.



Зауважимо, що осьовим перерізом кульового сегмента є круговий сегмент (див. рисунки).



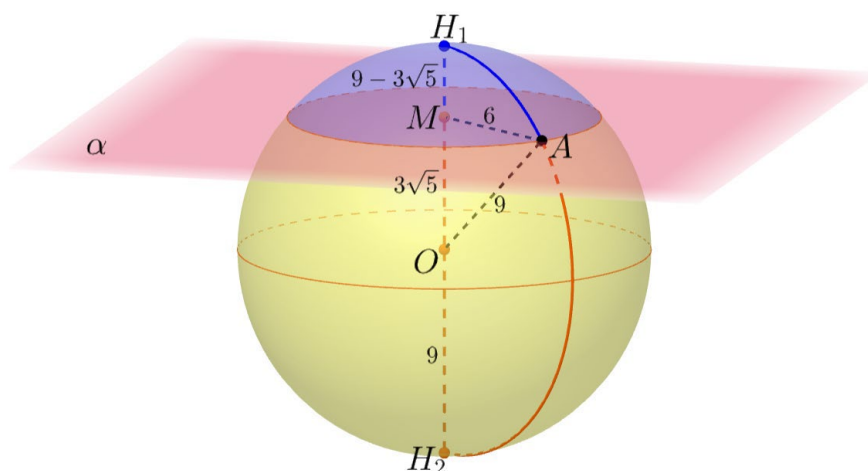
**Означення.** *Кульовим сегментом* називають геометричне тіло, що утворилось внаслідок обертання кругового сегмента навколо його осі симетрії.

### Ілюстративна задача

- 6.** Знайдіть висоти двох кульових сегментів, на які деяка куля розбивається площиною  $\alpha$ , якщо радіус кулі дорівнює 9 см, а радіус перерізу кулі вказаною площиною становить 6 см.

*Розв'язання.*

1) Нехай куля з центром  $O$  перетинається площиною  $\alpha$  по колу з центром у точці  $M$  (див. рисунок). Точка  $A$  — довільна точка на колі, що обмежує переріз цієї кулі площиною  $\alpha$ . За умовою,  $OA = 9$  см,  $MA = 6$  см.



2)  $\triangle OMA$  — прямокутний ( $OM \perp \alpha$ ,  $OM \perp MA$ ).

Тоді  $OM^2 = OA^2 - MA^2$ ,  $OM = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$  (см).

3) Висота меншого сегмента:  $MH_1 = OH_1 - OM = 9 - 3\sqrt{5}$  (см).

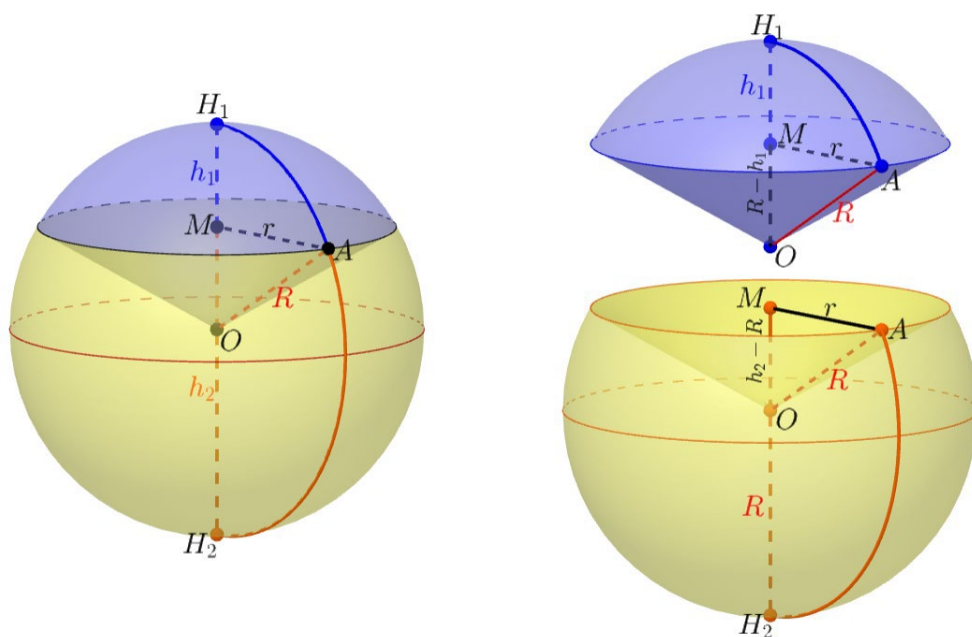
Висота більшого сегмента:  $MH_2 = OH_2 + OM = 9 + 3\sqrt{5}$  (см).

*Відповідь.*  $9 - 3\sqrt{5}$  см,  $9 + 3\sqrt{5}$  см.

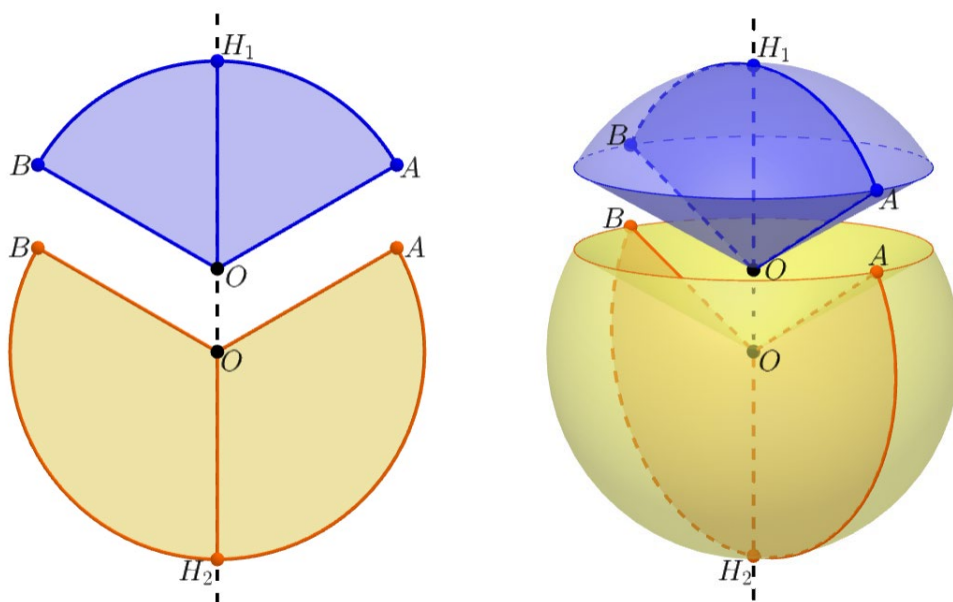
## IV. Кульовий сектор (5–7 хв)

**Означення. Кульовим сектором** називають частину кулі, утворену з кульового сегмента і конуса, основою якого є основа кульового сегмента, а вершиною — центр кулі.

На рисунках зображено два кульові сектори, на які поділяється куля з центром  $O$  та з радіусом  $R$ . Якщо відповідний кульовий сегмент менший за півкулю (сегмент з висотою  $MH_1 = h_1$ ), то його доповнюють конусом (конус з висотою  $OM = R - h_1$ ). Якщо відповідний кульовий сегмент більший за півкулю (сегмент з висотою  $MH_2 = h_2$ ), то конус із кульового сегмента вилучають. У такому випадку висота цього конуса  $OM = h_2 - R$ .



Зауважимо, що осьовим перерізом кульового сектора є круговий сектор (див. рисунок).



**Означення.** *Кульовим сектором* називають геометричне тіло, що утворилось внаслідок обертання кругового сектора навколо його осі симетрії.

### Ілюстративна задача

7. Знайдіть висоту конуса, бічною поверхнею якого є спільна частина двох кульових секторів, які утворюють кулю, якщо висоти відповідних кульових сегментів для цих секторів дорівнюють 0,4 дм і 1,2 дм.

*Розв'язання.*

1) Виконаємо побудову (див. рисунок). За умовою,  $MH_1 = 0,4$  дм,  $MH_2 = 1,2$  дм. Знайдемо довжину  $OM$ .

2) Нехай  $OM = x$  дм,  $MH_1 = 0,4$  дм.

Тоді  $OH_2 = OH_1 = x + 0,4$  дм, як радіуси кулі.

3) Оскільки  $MH_2 = 1,2$  дм, за умовою, то маємо рівняння:

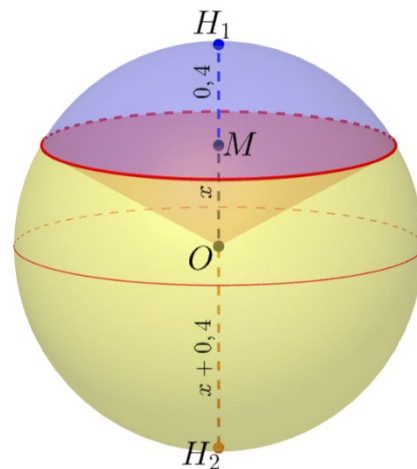
$$x + (x + 0,4) = 1,2,$$

$$2x + 0,4 = 1,2,$$

$$2x = 0,8, x = 0,4.$$

4) Отже,  $OM = 0,4$  дм — висота вказаного конуса.

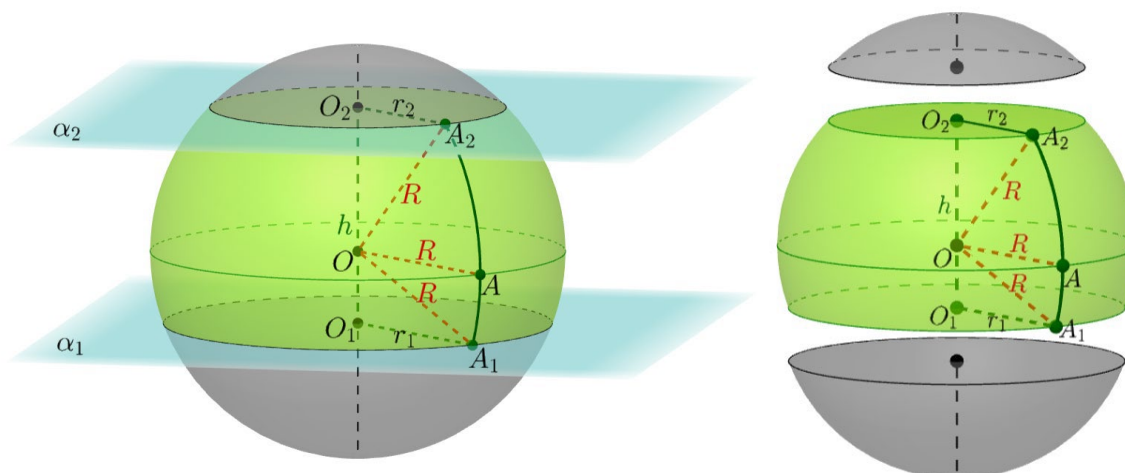
*Відповідь.* 0,4 дм.



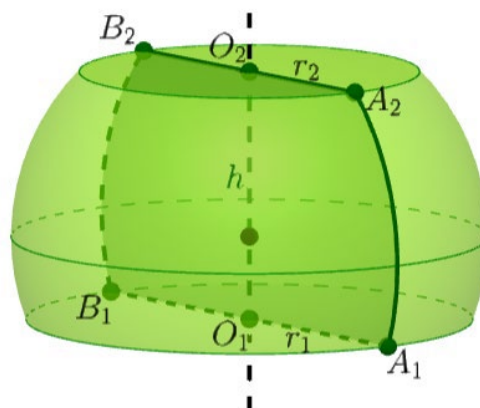
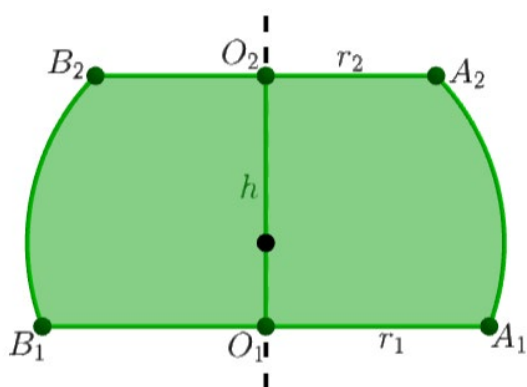
## V. Кульовий шар (5–7 хв)

**Означення.** *Кульовим шаром* називають частину кулі, що міститься між двома паралельними січними площинами. Перерізи кулі цими площинами називаються *основами кульового шару*, а відстань між ними — *висотою кульового шару*.

На рисунку зображено кульовий шар, що відтинається площинами  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  від кулі з центром  $O$  та з радіусом  $OA = OA_1 = OA_2 = R$ . Круг із центром  $O_1$  та з радіусом  $O_1A_1 = r_1$ , і круг із центром  $O_2$  та з радіусом  $O_2A_2 = r_2$  є основами кульового шару, а  $O_1O_2 = h$  — його висотою.



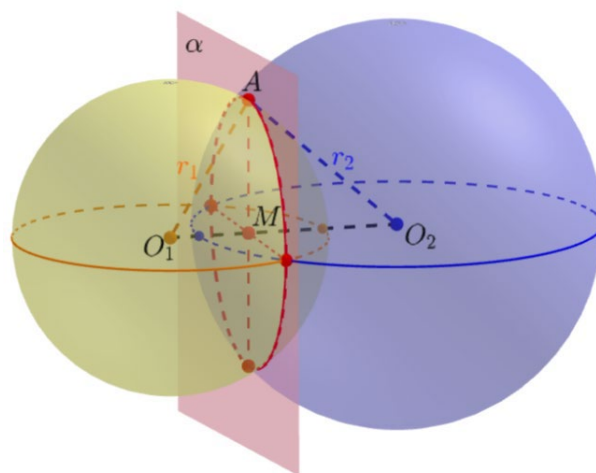
Осьовим перерізом кульового шару є круговий шар — частина круга, що міститься між двома його паралельними хордами (див. рисунок).



**Означення.** *Кульовим шаром* називають геометричне тіло, яке утворилось внаслідок обертання кругового шару навколо його осі симетрії.

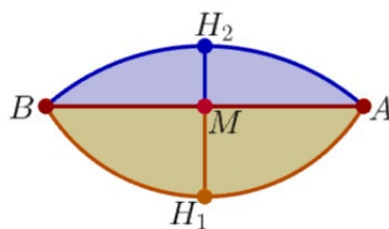
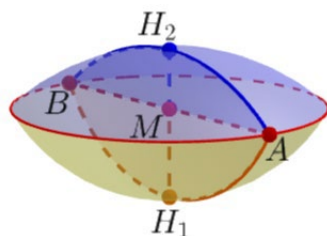
## VI. Лінія перетину двох сфер. Перетин двох куль (5–7 хв)

Нехай дві сфери з центрами  $O_1$  та  $O_2$  перетинаються так, що точка  $A$  — їхня спільна точка (див. рисунок). Проведемо через точку  $A$  площину  $\alpha$ , перпендикулярну до  $O_1O_2$ . Тоді,  $O_1O_2 \cap \alpha = M$ . За теоремою про переріз кулі площиною, площина  $\alpha$  перетинає обидві сфери по колу з центром у точці  $M$  і з радіусом  $MA$ . Отже, дане коло є лінією перетину двох сфер. Інших точок перетину, крім точок отриманого кола, сфери не мають.

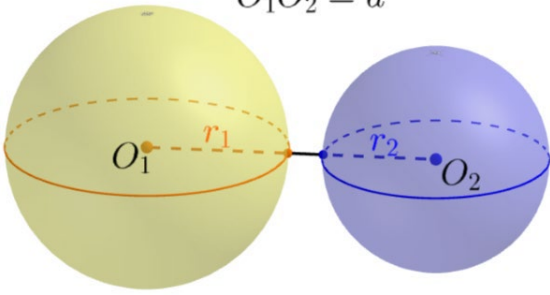
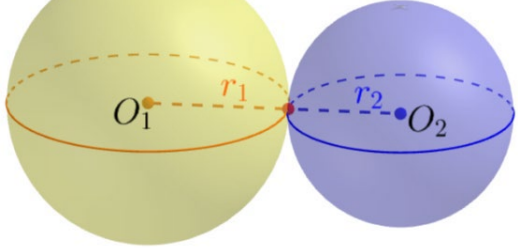
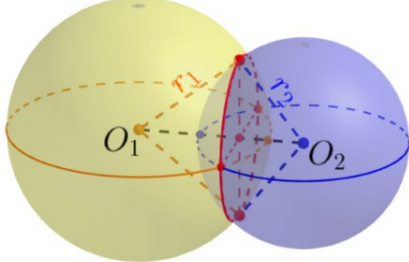
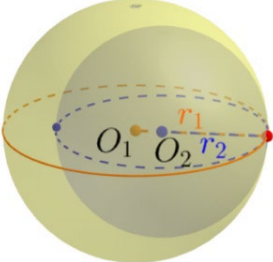
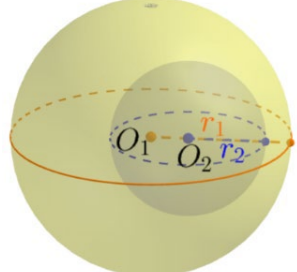


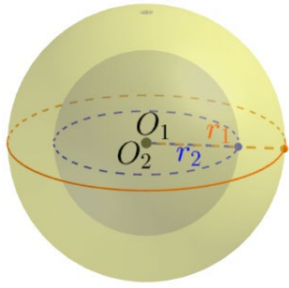
**Теорема.** Якщо дві сфери перетинаються, то лінія їхнього перетину є колом.

Зауважимо, що *перетином двох куль* є геометричне тіло, утворене двома кульовими сегментами, що мають рівні основи (див. рисунок).



У таблиці відображено випадки взаємного розташування двох сфер та співвідношення між радіусами цих сфер та відстанню між їхніми центрами.

| Взаємне розміщення двох сфер                                       | Відстань між центрами $d$       | Рисунок                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Сфери лежать одна поза одною та не мають спільних точок.           | $d >  r_1 + r_2 $               | $O_1O_2 = d$     |
| Сфери дотикаються зовні.                                           | $d =  r_1 + r_2 $               | $O_1O_2 = d$     |
| Сфери перетинаються.                                               | $ r_1 - r_2  < d <  r_1 + r_2 $ | $O_1O_2 = d$   |
| Сфери дотикаються внутрішньо.                                      | $d =  r_1 - r_2 $               | $O_1O_2 = d$  |
| Одна сфера розміщена всередині іншої так, що спільних точок немає. | $d <  r_1 - r_2 $               | $O_1O_2 = d$  |

| Взаємне розміщення<br>двох сфер | Відстань<br>між центрами $d$ | Рисунок                                                                                             |
|---------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Сфери<br>є концентричними.      | $d = 0$                      | $O_1O_2 = d$<br> |

### Ілюстративні задачі (8–10 хв)

8. Дві кулі перетинаються. Точки  $O_1$  і  $O_2$  — центри цих куль,  $\alpha$  — площина їхнього перетину. Доведіть, що  $O_1O_2 \perp \alpha$ .

*Розв'язання.*

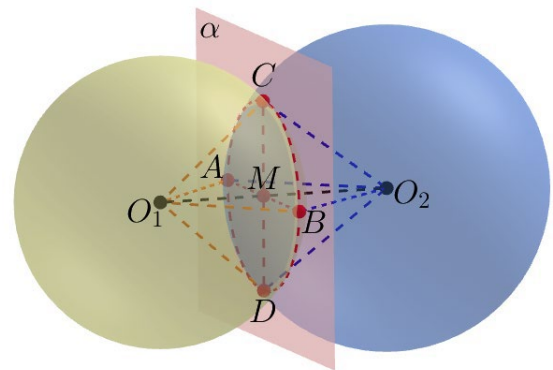
1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Як відомо, площина  $\alpha$  перетинає дані сфери по колу. Нехай точка  $M$  є центром цього кола, а  $AB$  та  $CD$  — його діаметри.

3) Оскільки точки  $O_1$  та  $O_2$  рівновіддалені від кінців відрізка  $AB$ , то  $O_1O_2 \perp AB$  — серединний перпендикуляр відрізка  $AB$ .

4) Аналогічно,  $O_1O_2$  є серединним перпендикуляром відрізка  $CD$  і  $O_1O_2 \perp CD$ .

5) Отже,  $O_1O_2 \perp AB$ ,  $O_1O_2 \perp CD$ , тому  $O_1O_2 \perp \alpha$ , за ознакою перпендикулярності прямої й площини, що і треба було довести.



9. Радіуси двох сфер дорівнюють 10 см і 17 см, а відстань між їхніми центрами становить 21 см. Знайдіть довжину лінії перетину даних сфер.

*Розв'язання.*

1) Нехай сфера з центром  $O_1$  та з радіусом 10 см і сфера з центром  $O_2$  та з радіусом 17 см перетинаються (див. рисунок), причому  $O_1O_2 = 21$  см. Позначимо центр  $H$  кола, яке є перетином даних сфер, і точку  $A$  на цьому колі.

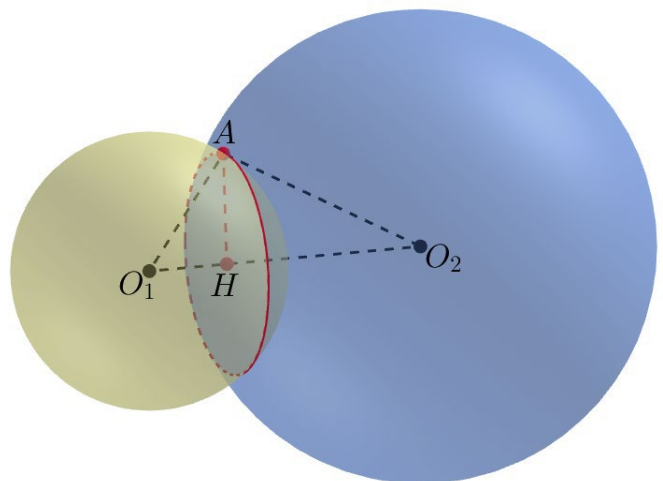
2)  $AH \perp O_1O_2$ , тобто відрізок  $O_1O_2$  перпендикулярний до площини кола з радіусом  $HA$ .

Це означає, що  $AH$  є висотою  $\triangle O_1AO_2$

зі сторонами  $O_1A = 10$  см,  $O_2A = 17$  см,  $O_1O_2 = 21$  см.

3) Оскільки  $S_{\triangle O_1AO_2} = \frac{AH \cdot O_1O_2}{2}$ , то  $AH = \frac{2S_{\triangle O_1AO_2}}{21}$ .

4) Використаємо формулу Герона  $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .



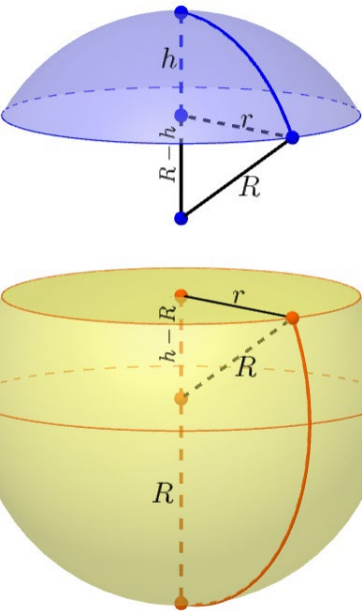
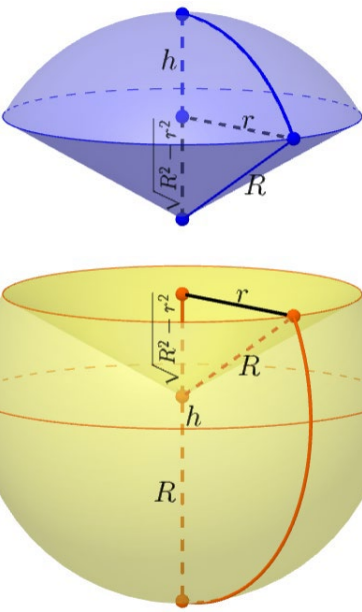
Тоді  $S_{\Delta O_1 A O_2} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$

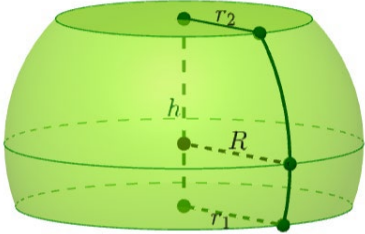
5) Таким чином,  $AH = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8 \text{ (см)}.$

6) Отже,  $2\pi \cdot 8 = 16\pi \text{ (см)}$  — довжина кола перетину двох даних сфер.

Відповідь.  $16\pi \text{ см}.$

## VII\*. Обчислювальні формули для частин сфери та кулі (5 хв)

| Тіло                                                                                                              | Поверхня                                                    | Площа поверхні                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>Кульовий сегмент</i></p>  | <p>Сферичний сегмент</p> <p>Поверхня кульового сегмента</p> | <p><math>S = 2\pi R h,</math><br/> <math>R</math> — радіус сфери,<br/> <math>h</math> — висота сферичного сегмента.</p> <p><math>S = 2\pi R h + \pi r^2,</math><br/> <math>R</math> — радіус кулі,<br/> <math>h</math> — висота сегмента,<br/> <math>r</math> — радіус основи сегмента.</p>                                                                                                                                                                                                             |
| <p><i>Кульовий сектор</i></p>  | <p>Поверхня кульового сектора</p>                           | <p>1) <math>S = \pi R(2h + r),</math> де:<br/> <math>R</math> — радіус кулі,<br/> <math>h</math> — висота сегмента,<br/> <math>r</math> — радіус основи сегмента.</p> <p>2) <math>S = 2\pi R \left( R - \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \right),</math> площа сегмента меншого від півкулі;<br/> <math>S = 2\pi R \left( R + \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \right),</math> площа сегмента більшого за півкулю, де:<br/> <math>R</math> — радіус кулі,<br/> <math>r</math> — радіус основи сегмента.</p> |

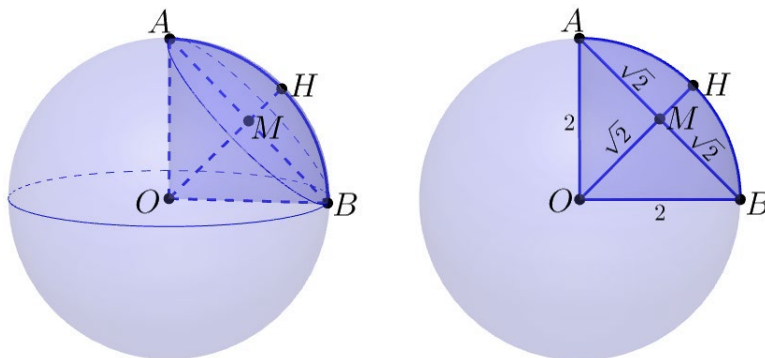
| Тіло                                                                                                     | Поверхня                | Площа поверхні                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Кульовий шар</b><br> | Сферичний пояс          | $S = 2\pi R h$ , де:<br>$R$ — радіус сфери,<br>$h$ — висота сферичного пояса.                                                          |
|                                                                                                          | Поверхня кульового шару | $S = 2\pi R h + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ , де:<br>$R$ — радіус шару,<br>$h$ — висота кульового шару,<br>$r_1, r_2$ — радіуси основ шару. |

### Ілюстративна задача (6–8 хв)

- 10.** Радіус кулі дорівнює 2 м. Визначте площу поверхні кульового сектора, якщо дуга в осьовому перерізі сектора дорівнює  $90^\circ$ .

*Розв'язання.*

1) Розглянемо кулю з центром  $O$  та з радіусом 2 м (див. рисунок). Сектор  $AOB$  — осьовий переріз кульового сектора цієї кулі. Відомо, що  $OA = OB = 2$  м та  $\widehat{AB} = 90^\circ$ .



2)  $\angle AOB = \widehat{AB} = 90^\circ$  — центральний кут, що спирається на дугу  $AB$ .

3)  $\triangle AOB$  — прямокутний,  $OA = OB = 2$  (м),  $AB = 2\sqrt{2}$  м, за наслідком з теореми Піфагора.

4) Тоді  $AM = MB = OM = \sqrt{2}$  м,  $MH = OH - OM = 2 - \sqrt{2}$  (м).

*І спосіб обчислення площі.*

$$S_{\text{сект}} = \pi R(2h + r), \text{ тобто } S_{\text{сект}} = 2\pi \left( 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right) = (8 - 2\sqrt{2})\pi \text{ (м}^2\text{)}.$$

*II спосіб обчислення площі.*

$$S = 2\pi R \left( R - \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \right), \text{ тобто } S_{\text{сект}} = 4\pi \left( 2 - \sqrt{4 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (8 - 2\sqrt{2})\pi \text{ (м}^2\text{)}.$$

*Відповідь.*  $(8 - 2\sqrt{2})\pi \text{ м}^2$ .

## VIII. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

### Як я вирішую певну проблему?

**Задача.** Макет планети має радіус 12 см. Точкове джерело світла, яке імітує Сонце, розташоване за межами цього макета. На якій відстані від макета треба розташувати лампу, щоб вона освітлювала тільки третину його поверхні?

*Розв'язання.*

1) Виконаємо побудову (див. рисунок). Джерело світла розташоване в точці  $S$  і освітлює поверхню кулі. Промені світла, що зображені на рисунку, мають бути дотичними до даної кулі і відтинати від неї сегмент, площа поверхні якого становить  $\frac{1}{3}$  від площі всієї поверхні кулі.

2) Оскільки  $S_{\text{сегм}} = 2\pi Rh$ , а  $S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2$ , то:

$$\frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{h}{2R} = \frac{1}{3}; \quad h = \frac{2}{3}R, \quad h = 8 \text{ (см)}.$$

3) Отже,  $HM = 8$  см,  $OM = 4$  см,  $OM + MH = 12$  см, а також  $OA = 12$  см, за умовою.

4)  $\triangle AMO$  — прямокутний ( $OM \perp MA$ ).

$$AM^2 = OA^2 - OM^2, \text{ тобто: } AM = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

5) Позначимо  $SH = h$ .

6)  $\triangle AMS$  — прямокутний, бо  $SM \perp MA$ . Звідси,  $SA^2 = SM^2 + MA^2$ , за теоремою Піфагора, тобто:  $SA^2 = (8 + h)^2 + 128$ .

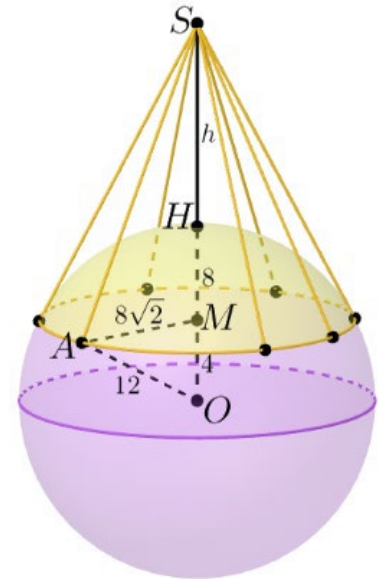
7)  $\triangle OAS$  — прямокутний,  $OA \perp SA$ , як радіус, проведений в точку дотику  $SA$  з поверхнею кулі. Тоді  $SA^2 = SO^2 - OA^2$ , тобто:  $SA^2 = (12 + h)^2 - 144$ .

8) Оскільки  $SA^2 = (8 + h)^2 + 128$  і  $SA^2 = (12 + h)^2 - 144$ , то отримаємо рівняння:

$$(8 + h)^2 + 128 = (12 + h)^2 - 144, \quad h^2 + 16h + 192 = 24h + h^2, \quad 8h = 192, \quad h = 24.$$

9) Отже,  $SH = 24$  см, і саме на такий відстані від поверхні макета треба розташовувати джерело світла, щоб воно освітлювало третину поверхні макета.

*Відповідь.* 24 см.



## IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

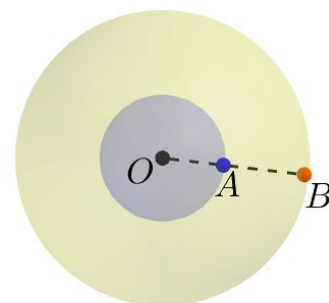
### Рівень А

1. Куля з радіусом 3,2 см перетинається площиною  $\beta$ . Висота одного з утворених кульових сегментів становить 1,9 см. Знайдіть висоту іншого кульового сегмента.
2. Знайдіть площу осевого перерізу півкулі з діаметром 2 см.
3. Радіус  $OB = 5,6$  см кулі з центром  $O$  перетинає поверхню концентричної кулі в точці  $A$ . Знайдіть радіус другої кулі, якщо  $AB = 1,2$  см.
4. Дві сфери з радіусами 5 см і 3 см мають лише одну спільну точку. Знайдіть відстань між їхніми центрами.
5. Дві сфери з діаметрами 6 см і 14 см лежать одна поза одною і не мають спільних точок. Знайдіть відстань між цими сферами, якщо довжина відрізка, що з'єднує їхні центри становить 13 см.
6. Відстань між центрами двох куль дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих куль, якщо їхні радіуси дорівнюють:
  - 1) 9 см і 3 см;
  - 2) 5 см і 2 см;
  - 3) 13 см і 1 см;
  - 4) 9 см і 7 см.

7. Радіуси двох концентричних сфер дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть довжини відрізків, на які діаметр більшої сфери ділиться меншою сферою.
8. Сферичний сегмент, висота якого становить 1 см, відтинається від сфери з радіусом 6 см. Знайдіть площу поверхні даного сферичного сегмента.
9. Радіус кулі дорівнює 10 см, а висота її сегмента становить 3 см. Знайдіть:
  - 1) площу поверхні кульового сегмента;
  - 2) площу поверхні кульового сектора, що відповідає даному сегменту.
10. Сферичний пояс, висотою 6 см, відтинається від сфери з радіусом 10 см. Знайдіть площу поверхні даного сферичного пояса.
11. Основи кульового шару віддалені на 2 см і 9 см від центра кулі. Знайдіть висоту кульового шару.
12. Дві паралельні площини, що розташовані на відстані 6 см від центра кулі з радіусом 10 см, відтинають від неї два однакові сегменти. Знайдіть площу поверхні тіла, що утворилось.

### Рівень В

1. Чи перетинаються дві кулі з діаметрами 10 дм і 14 дм, якщо відстань між їхніми центрами:
  - 1) 60 см;
  - 2) 130 см?
2. Відстань між центрами сфер із радіусами  $R_1 = 8$  см та  $R_2 = 6$  см дорівнює 10 см. Знайдіть площу круга, який обмежує коло в перетині даних сфер.
3. Дві сфери мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 12 дм. Знайдіть радіуси цих сфер, якщо вони відносяться, як 2 : 5.
4. Дві сфери мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 15 см. Знайдіть радіуси сфер, якщо вони відносяться, як 2 : 3.
5. Точки  $C$  і  $D$  — діаметрально протилежні точки кола, яке є перетином двох сфер із центрами в точках  $O_1$  і  $O_2$ . Доведіть, що промінь  $O_1O_2$  — бісектриса кута  $CO_1D$ .
6. На рисунку зображено концентричні сфери з центром у точці  $O$ ,  $AB = 8$  см. Знайдіть радіуси сфер, якщо вони відносяться, як 3 : 7.



7. Площа поверхні кульового сегмента становить  $72\pi$  см<sup>2</sup>, радіус кулі  $R = 6$  см. Знайдіть висоту сегмента.
8. Площа сферичного сегмента відноситься до площі сфери, частиною якої він є, як 5 : 8. Знайдіть радіус сфери, якщо висота вказаного сегмента на 1 см більша за радіус цієї сфери.
9. Осьовим перерізом кульового сектора є круговий сектор з радіусом  $R$  та центральним кутом  $60^\circ$ . Знайдіть площу поверхні кулі, частиною якої є даний сектор.

10. Вершина конуса є центром кулі з радіусом 13 см, а його основа — перерізом даної кулі. Знайдіть площі кульових секторів, які утворилися.
11. Дві сфери з центрами  $O_1$  та  $O_2$  дотикаються зовнішнім або внутрішнім чином у точці  $A$ . Доведіть, що точка  $A$  належить прямій  $O_1O_2$ .
12. Дві паралельні площини перетинають сферу по рівних між собою колах, з радіусами 3 см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 8 см.

### Рівень С

1. Три сфери попарно дотикаються зовні. Радіус однієї зі сфер дорівнює 7 см, а відрізок, що з'єднує центри двох інших сфер, дорівнює 9 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих сфер.
2. Дві рівні сфери, що дотикаються одна до одної, внутрішньо дотикаються до третьої сфери. Сполучивши їхні центри, отримуємо трикутник з периметром 18 см. Визначте радіус більшої сфери.
3. У кулі проведено два паралельні перерізи, менший з яких дорівнює  $81\pi$  см<sup>2</sup>. Діаметр кулі, що проходить через центри даних перерізів, ділиться ними у відношенні 2 : 7 : 1. Знайдіть площі поверхонь меншого з кульових сегментів та кульового шару між площинами цих сегментів.
4. Висота кульового шару дорівнює 7 см, а різниця радіусів його основ — 17 см. Знайдіть площі основ даного кульового шару, якщо радіус кулі дорівнює 65 см.
5. Круговий сектор із кутом  $30^\circ$  і радіусом  $R$  обертається навколо одного з крайніх радіусів. Знайдіть відношення висоти кульового сектора до його радіуса.
6. Діаметри основ кульового шару дорівнюють 6 см і 8 см, а його висота становить 7 см. Знайдіть площу осьового перерізу даного кульового шару.
7. Доведіть, що відношення площі сферичного сегмента до площі всієї сфери дорівнює відношенню висоти вказаного сегмента до діаметра сфери.
8. Радіус сфери дорівнює  $R$ , а висоти двох сферичних поясів  $h_1$  і  $h_2$  задовольняють умову  $h_1 + h_2 = R$ . Доведіть, що сума площ цих поясів менша за площу всієї сфери.

## Х. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

### Мої враження від уроку.

|         |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10     |
| Жахливі |   |   |   |   |   |   |   |   | Чудові |

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1) .....
- 2) .....

### Можливі теми учнівських проєктів

1. Моделювання взаємного розміщення двох, трьох та більшої кількості сфер. Розв'язування задач.
2. Вимірювання площ поверхонь кульових частин у домашніх предметах, наприклад, чашах, лампах, елементах декору тощо.
3. Дослідницький STEM-проєкт: моделювання кульових частин засобами GeoGebra.

### Список використаної літератури

- 1) Бевз Г. П. Геометрія: 11 кл. : підручн. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. — К. : Генеза, 2011.
- 2) Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень: підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, — К.: УОВЦ «Оріон», 2020.
- 3) Істер О. С. Геометрія: (профіл. рівень) : підручн. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019.
- 4) Ключко І. Я. Математика. Геометрія ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2024.
- 5) Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019.
- 6) Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручн. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019.