

Урок 1. Комбінація прямої призми та циліндра

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) розпізнавати циліндр і призму серед інших геометричних тіл;
- 2) називати основні елементи циліндра й призми;
- 3) знаходити спільні властивості та відмінності між циліндром та призмою;
- 4) будувати комбінації циліндра й призми;
- 5) порівнювати геометричні властивості циліндра й призми;
- 6) аналізувати просторові форми у реальному житті;
- 7) робити висновки про роль комбінацій геометричних тіл у практичних задачах.

II. Повторення

1. Коло можна вписати у:

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| 1) прямокутник; | 2) ромб; |
| 3) довільний паралелограм; | 4) довільну трапецію; |
| 5) квадрат. | |

А	Б	В	Г	Д
4), 5)	1), 2), 4)	2), 5)	2), 4)	2), 4), 5)

2. Коло можна описати навколо:

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1) прямокутника; | 2) ромба; |
| 3) довільного паралелограма; | 4) рівнобічної трапеції; |
| 5) квадрата. | |

А	Б	В	Г	Д
1)	1), 4)	4), 5)	1), 4), 5)	1), 2), 5)

3. Знайдіть тупий кут трапеції, якщо центр кола, описаного навколо неї, лежить на більшій основі, а кут між діагоналями дорівнює 70° .

А	Б	В	Г	Д
135°	145°	125°	115°	155°

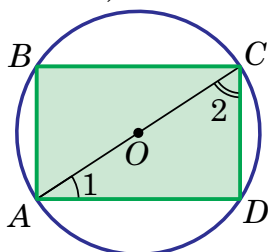
4. Сторона ромба дорівнює 4 см. Радіус кола, вписаного у ромб, дорівнює 1 см. Знайдіть тупий кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
100°	120°	130°	140°	150°

5. Установіть відповідність між радіусом кола (1–3), описаного навколо чотирикутника, та його числовим значенням (А–Д), якщо точка O — центр описаного кола.

Коло, описане навколо чотирикутника

- 1 $CD = 5$, $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$, $OC = ?$



Числове

значення радіуса

А 8

Б 7

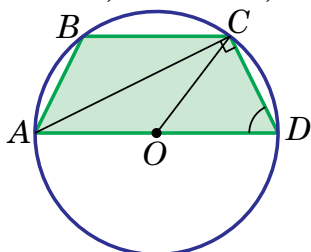
В 4

Г 5

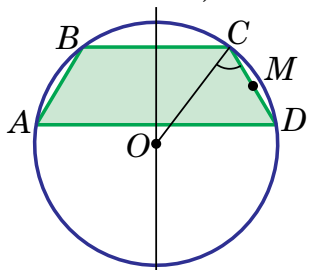
Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

- 2 $CD = 7$, $\angle D = 60^\circ$, $OC = ?$



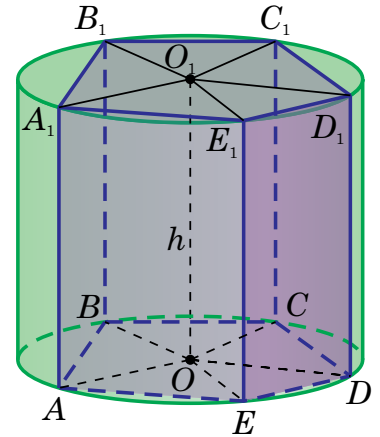
- 3 $CM = MD = 4$, $\angle OCM = 60^\circ$, $OC = ?$



III. Призма, вписана у циліндр. Означення та властивості

Означення. Призму, основи якої вписано в основи циліндра, називають **вписаною в циліндр**. При цьому циліндр називають описаним навколо призми.

Наприклад, на рисунку (див. рисунок) призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ є вписаною у циліндр із віссю OO_1 .



Властивості

1. Основою вписаної в циліндр призми є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу циліндра r .
2. Висота h призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.

Приклад 1. Основою призми є прямокутний трикутник із катетами 10 см і 24 см. Діагональ бічної грані, яка містить більший із катетів, утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

Розв'язання. 1) Пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано у циліндр з віссю OO_1 (див. рисунок). За умовою $\triangle ABC$ — прямокутний, $AC = 24$ см, $BC = 10$ см — його катети а $\angle C_1AC = 30^\circ$.

2) Розглянемо $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$):

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, за теоремою Піфагора.

Тобто: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ (см).

3) Оскільки $\triangle ABC$ прямокутний і центр O його описаного кола є серединою гіпотенузи AB , то $r = \frac{AB}{2} = 13$

(см) — радіус кола, а отже, і радіус циліндра.

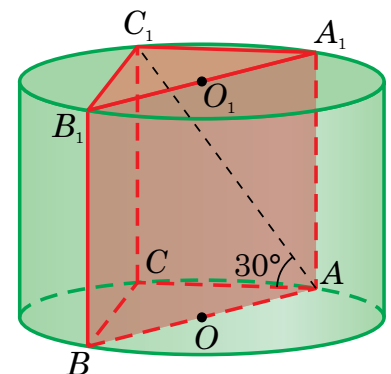
4) $\triangle ACC_1$ — прямокутний ($\angle ACC_1 = 90^\circ$):

$\operatorname{tg} \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC}$, $CC_1 = 24 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 8\sqrt{3}$ (см).

Тобто $h = CC_1 = 8\sqrt{3}$ (см) — висота циліндра.

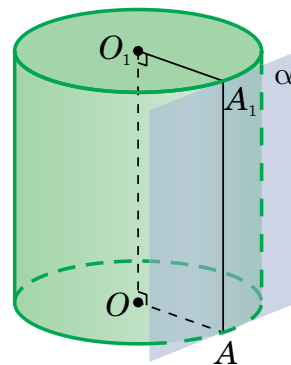
5) Отже, $S_6 = 2\pi rh$, $S_6 = 2\pi \cdot 13 \cdot 8\sqrt{3} = 208\pi\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $208\pi\sqrt{3}$ см².



IV. Призма, описана навколо циліндра. Означення та властивості

Означення. *Дотичною до циліндра площиною* називають площину, що проходить через твірну циліндра та інших спільних точок з циліндром не має.



Властивість дотичної площини до циліндра

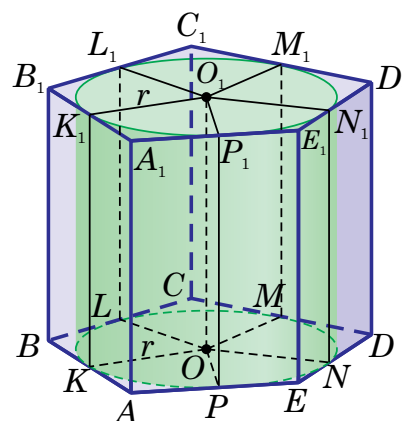
Теорема. Якщо площина дотикається до циліндра по деякій твірній, то радіуси основ циліндра, проведені до кінців твірної, перпендикулярні до дотичної площини.

Ознака дотичної площини до циліндра.

Теорема. Якщо площина, яка проходить через твірну циліндра, перпендикулярна до радіуса, що проведений до кінця цієї твірної, то площина є дотичною до циліндра.

Означення. Призму, основи якої описано навколо основ циліндра, називають *описаною навколо циліндра*. При цьому циліндр називають *вписаним у призму*.

Наприклад, на рисунку (див. рисунок) призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ є описаною навколо циліндра із віссю OO_1 .

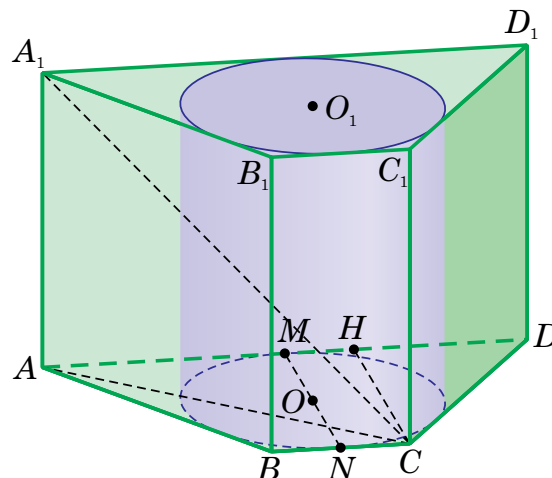


Властивості

1. Основою призми, описаної навколо циліндра, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус кола дорівнює радіусу r циліндра.
2. Бічні грані призми, описаної навколо циліндра, є дотичними до циліндра.
3. Висота h призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.

Приклад 2. Основою призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 6 см і 24 см. Діагональ призми дорівнює $\sqrt{538}$ см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.

Розв'язання. 1) У призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписано циліндр з віссю OO_1 (див. рисунок). Ос-



новою цієї призми є рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами $AD = 24$ см і $BC = 6$ см, $AC = \sqrt{538}$ см.

2) У рівнобічній трапеції $ABCD$ проведемо діагональ AC і висоту CH (див. рисунок).

$$3) AH = \frac{BC + AD}{2} = 15 \text{ (см)},$$

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = 9 \text{ (см)},$$

за властивістю рівнобічної трапеції.

4) Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, то $AB + CD = BC + AD$, за властивістю

описаного чотирикутника, тобто $AB = CD = \frac{6 + 24}{2} = 15$ (см).

5) $\triangle CHD$ — прямокутний ($\angle CHD = 90^\circ$): $CH^2 = CD^2 - HD^2$.

Тобто $CH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см).

6) $\triangle AHC$ — прямокутний ($\angle AHC = 90^\circ$): $AC^2 = AH^2 + HC^2$.

Тобто $AC = \sqrt{15^2 + 12^2} = \sqrt{369}$ (см).

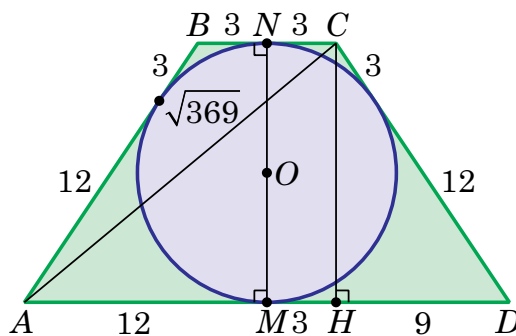
7) $OM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CH = 6$ (см), тобто $r = 6$ см — радіус основи циліндра.

8) У призмі $\triangle A_1AC$ — прямокутний ($\angle A_1AC = 90^\circ$): $AA_1^2 = A_1C^2 - AC^2$.

Тобто $AA_1 = \sqrt{538 - 369} = 13$ (см). Таким чином, $h = 13$ см — висота циліндра.

9) Отже, $S_{\text{п}} = 2\pi r(h + r)$, $S_{\text{п}} = 2\pi \cdot 6 \cdot (13 + 6) = 228\pi$ (см²).

Відповідь. 228π см².



V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Акумулятор 18650 має форму циліндра з діаметром 18 мм та довжиною 65 мм. Виробник упаковує такі акумулятори для роздрібної торгівлі поштучно в картонні упаковки, що мають форму прямокутного паралелепіпеда (див. рисунок). Які мінімальні розміри упаковки для одного акумулятора? Скільки картону потрібно виробнику, щоб виготовити упаковки для 1000 таких акумуляторів, якщо, крім самих граней упаковки, на з'єднувальні частини упаковки витрачається ще 25% матеріалу?



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є прямокутник?
2. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є ромб?
3. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є ромб?
4. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є прямокутник, відмінний від квадрата?
5. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить поза призмою.
6. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить усередині призми.
7. Основою прямої призми є чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 123^\circ$, $\angle C = 144^\circ$, $\angle D = 57^\circ$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
8. Основою прямої призми є чотирикутник, кути якого в послідовному порядку відносяться, як $3 : 5 : 8 : 6$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
9. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі, а гострий кут становить 60° . Чи можна вписати циліндр у цю призму?
10. Сума бічних сторін трапеції, яка є основою прямої призми, дорівнює 16 см, а середня лінія трапеції становить 7 см. Чи можна вписати циліндр у цю призму?

Рівень В

1. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 3 см, а висота — $5\sqrt{2}$ см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
2. Навколо циліндра, радіус якого дорівнює 8 см, а висота становить $6\sqrt{3}$ см, описано правильну трикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
3. В основі прямої призми лежить квадрат зі стороною 6 см. Бічні ребра призми дорівнюють по 10 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.
4. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Бічні ребра призми дорівнюють по 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.
5. Основа прямої призми — квадрат із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму, якщо площа діагонального перерізу призми дорівнює $24\sqrt{2}$ см².
6. Основа прямої призми — прямокутник зі сторонами 7 см і 24 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.
7. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а навколо нього описано правильну шестикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.

8. У циліндр вписано правильну шестикутну призму, а навколо нього описано правильну чотирикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Висота призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні становить 40 см^2 . Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо цієї призми.
10. Основою прямої призми є ромб. Площа бічної поверхні призми дорівнює 120 см^2 . Знайдіть радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, якщо висота призми дорівнює 6 см, а гострий кут основи становить 60° .

Рівень С

1. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а висота призми — h . Знайдіть площу осцевого перерізу циліндра, описаного навколо призми.
2. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a , а висота призми — H . Знайдіть площу осцевого перерізу циліндра, вписаного в призму.
3. Площа осцевого перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної у циліндр.
4. Площа осцевого перерізу циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу бічної поверхні правильної шестикутної призми, описаної навколо циліндра.
5. У правильну чотирикутну призму вписано циліндр, радіус основи якого дорівнює R , а діагональ осцевого перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
6. Навколо правильної трикутної призми описано циліндр, радіус основи якого r , а діагональ осцевого перерізу утворює з твірною кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
7. У правильну трикутну призму вписано циліндр, висота якого дорівнює H , а радіус основи становить R . Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яких бічна поверхня циліндра дотикається до бічної поверхні призми.
8. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a , а висота становить H . У призму вписано циліндр. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яких бічна поверхня циліндра дотикається до двох сусідніх бічних граней призми.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом α при основі. Діагональ грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, описаного навколо призми, дорівнює R .
10. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, дорівнює r .

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Площі поверхонь фігур, що є комбінаціями циліндра і призми.
- 2.** Взаємне розташування циліндра і призми.
- 3.** Дослідження спільних властивостей і відмінностей між призмами та циліндрами.
- 4.** Симетрія в призмах і циліндрах, а також в геометричних фігурах, що є комбінаціями призм та циліндрів.
- 5.** Побудова комбінацій призм та циліндрів засобами GeoGebra або інших сервісів. Властивості та ознаки.







