

Урок 1. Комбінація прямої призми та циліндра

План уроку

1. Призма, вписана у циліндр. Означення та властивості.
2. Призма, описана навколо циліндра. Означення та властивості.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані й зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

подає дані й зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

добирає, фіксує інформацію з різних джерел [12 МАО 2.1.2-1];

упорядковує інформацію математичного змісту [12 МАО 2.1.3-1];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями, ураховує емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2-1];

класифікує й структурує математичні поняття та факти [12 МАО 4.1.2-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Які предмети з навколишнього світу можна уявити як поєднання призми та циліндра?

2) Чи використовують поєднання кількох видів просторових фігур для виконання дизайнерських проєктів різної складності?

3) Що спільного між циліндром та призмою? Чим відрізняються ці фігури?

4) Чи можна створити геометричну фігуру, яка одночасно матиме ознаки і циліндра, і призми?

5) Чи важливо в практичних задачах уміти комбінувати циліндр та призму?

II. Повторення (5 хв)

1. Коло можна вписати у:

1) прямокутник;

2) ромб;

3) довільний паралелограм;

4) довільну трапецію;

5) квадрат.

А	Б	В	Г	Д
4), 5)	1), 2), 4)	2), 5)	2), 4)	2), 4), 5)

Відповідь. Д.

2. Коло можна описати навколо:

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1) прямокутника; | 2) ромба; |
| 3) довільного паралелограма; | 4) рівнобічної трапеції; |
| 5) квадрата. | |

А	Б	В	Г	Д
1)	1), 4)	4), 5)	1), 4), 5)	1), 2), 5)

Відповідь. Г.

3. Знайдіть тупий кут трапеції, якщо центр кола, описаного навколо неї, лежить на більшій основі, а кут між діагоналями дорівнює 70° .

А	Б	В	Г	Д
135°	145°	125°	115°	155°

Відповідь. В.

4. Сторона ромба дорівнює 4 см. Радіус кола, вписаного у ромб, дорівнює 1 см. Знайдіть тупий кут ромба.

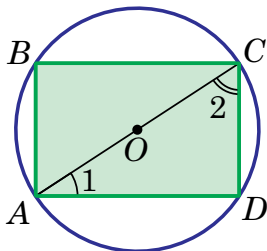
А	Б	В	Г	Д
100°	120°	130°	140°	150°

Відповідь. Д.

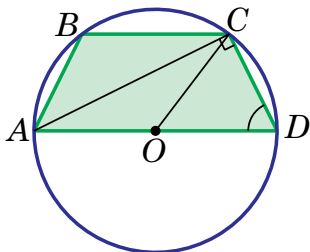
5. Установіть відповідність між радіусом кола (1–3), описаного навколо чотирикутника, та його числовим значенням (А–Д), якщо точка O — центр описаного кола.

Коло, описане навколо чотирикутника

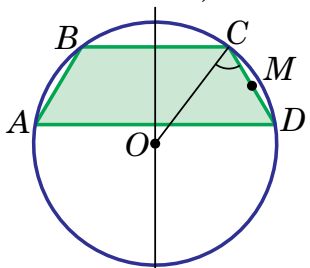
1 $CD = 5$, $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$, $OC = ?$



2 $CD = 7$, $\angle D = 60^\circ$, $OC = ?$



3 $CM = MD = 4$, $\angle OCM = 60^\circ$, $OC = ?$



Числове

значення радіуса

А 8

Б 7

В 4

Г 5

Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Відповідь. 1 – Г; 2 – Б; 3 – А.

Як я вирішую певну проблему?

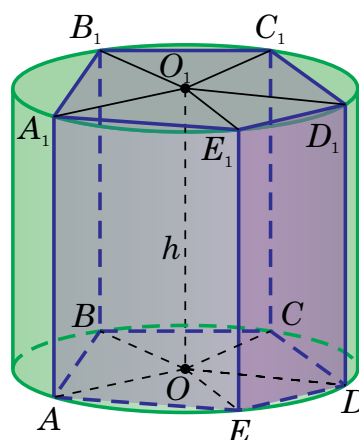
Задача. Акумулятор 18650 має форму циліндра з діаметром 18 мм та довжиною 65 мм. Виробник упаковує такі акумулятори для роздрібної торгівлі поштучно в картонні упаковки, що мають форму прямокутного паралелепіпеда (див. рисунок). Які мінімальні розміри упаковки для одного акумулятора? Скільки картону потрібно виробнику, щоб виготовити упаковки для 1000 таких акумуляторів, якщо, крім самих граней упаковки, на з'єднувальні частини упаковки витрачається ще 25% матеріалу?



III. Призма, вписана у циліндр. Означення та властивості (10 хв)

Означення. Призму, основи якої вписано в основи циліндра, називають **вписаною в циліндр**. При цьому циліндр називають описаним навколо призми.

Наприклад, на рисунку (див. рисунок) призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ є вписаною у циліндр із віссю OO_1 .



Властивості

1. Основою вписаної в циліндр призми є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу циліндра r .
2. Висота h призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.

Ілюстративні приклади

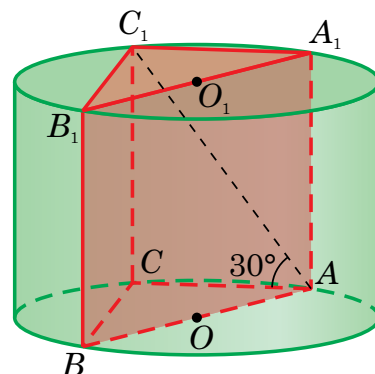
6. Основою призми є прямокутний трикутник із катетами 10 см і 24 см. Діагональ бічної грані, яка містить більший із катетів, утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

Розв'язання. 1) Пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано у циліндр з віссю OO_1 (див. рисунок). За умовою $\triangle ABC$ — прямокутний, $AC = 24$ см, $BC = 10$ см — його катети а $\angle C_1AC = 30^\circ$.

2) Розглянемо $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$):

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, за теоремою Піфагора.

Тобто: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ (см).



3) Оскільки $\triangle ABC$ прямокутний і центр O його описаного кола є серединою гіпотенузи AB , то $r = \frac{AB}{2} = 13$ (см) — радіус кола, а отже, і радіус циліндра.

4) $\triangle ACC_1$ — прямокутний ($\angle ACC_1 = 90^\circ$):

$$\operatorname{tg} \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC}, \quad CC_1 = 24 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Тобто $h = CC_1 = 8\sqrt{3}$ (см) — висота циліндра.

5) Отже, $S_6 = 2\pi rh$, $S_6 = 2\pi \cdot 13 \cdot 8\sqrt{3} = 208\pi\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $208\pi\sqrt{3}$ см².

- 7.** У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть кут між діагоналлю її бічної грані й віссю циліндра, якщо радіус основи циліндра дорівнює висоті циліндра.

Розв'язання. 1) Правильну призму $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ вписано у циліндр з віссю OO_1 (див. рисунок). Знайдемо кут між прямими AB_1 та OO_1 .

2) Оскільки прямі AB_1 та OO_1 мимобіжні, $AA_1 \parallel OO_1$, то $\angle A_1AB_1$ — шуканий.

3) Нехай $OA = OB = r$, $AA_1 = BB_1 = OO_1 = r$, за умовою.

4) Розглянемо $\triangle AOB$: $OA = OB = r$,

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \text{ як центральний кут правильного шестикутника.}$$

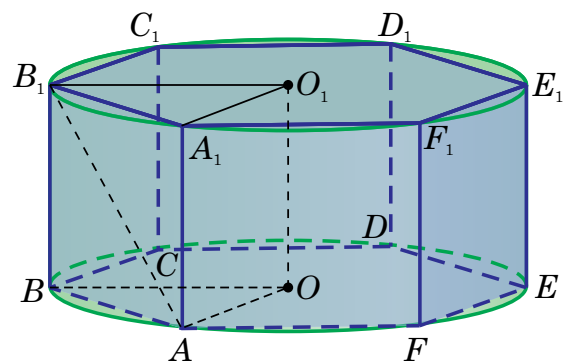
Отже, $\triangle AOB$ — рівносторонній, за ознакою. Тоді $AB = OA = OB = r$.

5) Розглянемо чотирикутник AA_1B_1B .

Оскільки $AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = AB = r$ і $AA_1 \perp AB$, то AA_1B_1B — квадрат.

6) Отже, AB_1 — діагональ квадрата AA_1B_1B . Тоді $\angle A_1AB_1 = \frac{\angle A_1AB}{2} = 45^\circ$, за властивістю діагоналей квадрата.

Відповідь. 45° .

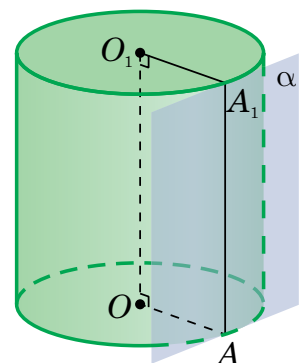


IV. Призма, описана навколо циліндра. Означення та властивості (10 хв)

Означення. *Дотичною до циліндра площиною* називають площину, що проходить через твірну циліндра та інших спільних точок з циліндром не має.

Властивість дотичної площини до циліндра

Теорема. Якщо площина дотикається до циліндра по деякій твірній, то радіуси основ циліндра, проведені до кінців твірної, перпендикулярні до дотичної площини.

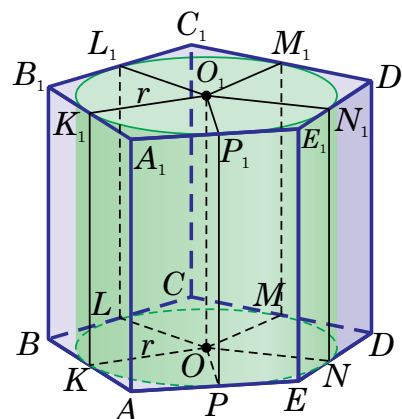


Ознака дотичної площини до циліндра.

Теорема. Якщо площина, яка проходить через твірну циліндра, перпендикулярна до радіуса, що проведений до кінця цієї твірної, то площина є дотичною до циліндра.

Означення. Призму, основи якої описано навколо основ циліндра, називають **описаною навколо циліндра**. При цьому циліндр називають **вписаним у призму**.

Наприклад, на рисунку (див. рисунок) призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ є описаною навколо циліндра із віссю OO_1 .



Властивості

1. Основою призми, описаної навколо циліндра, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус кола дорівнює радіусу r циліндра.
2. Бічні грані призми, описаної навколо циліндра, є дотичними до циліндра.
3. Висота h призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.

Ілюстративні приклади

8. Основою призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 6 см і 24 см. Діагональ призми дорівнює $\sqrt{538}$ см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.

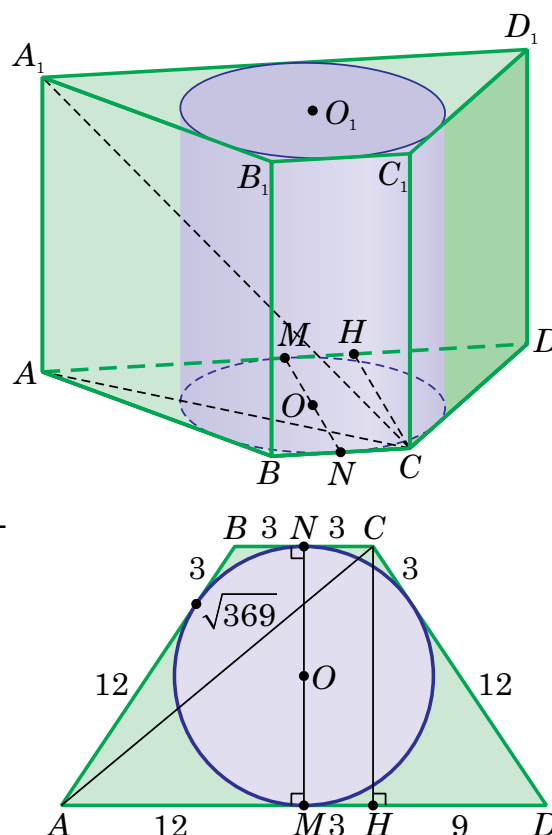
Розв'язання. 1) У призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписано циліндр з віссю OO_1 (див. рисунок). Основою цієї призми є рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами $AD = 24$ см і $BC = 6$ см, $A_1 C = \sqrt{538}$ см.

2) У рівнобічній трапеції $ABCD$ проведемо діагональ AC і висоту CH (див. рисунок).

$$3) AH = \frac{BC + AD}{2} = 15 \text{ (см)},$$

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = 9 \text{ (см)},$$

за властивістю рівнобічної трапеції.



4) Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, то $AB + CD = BC + AD$, за властивістю описаного чотирикутника, тобто $AB = CD = \frac{6+24}{2} = 15$ (см).

5) $\triangle CHD$ — прямокутний ($\angle CHD = 90^\circ$): $CH^2 = CD^2 - HD^2$.

Тобто $CH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см).

6) $\triangle AHC$ — прямокутний ($\angle AHC = 90^\circ$): $AC^2 = AH^2 + HC^2$.

Тобто $AC = \sqrt{15^2 + 12^2} = \sqrt{369}$ (см).

7) $OM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}CH = 6$ (см), тобто $r = 6$ см — радіус основи циліндра.

8) У призмі $\triangle AA_1C$ — прямокутний ($\angle A_1AC = 90^\circ$): $AA_1^2 = A_1C^2 - AC^2$.

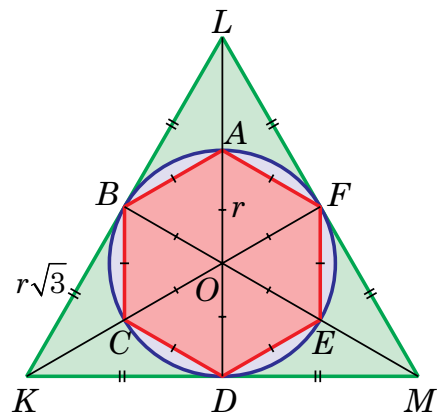
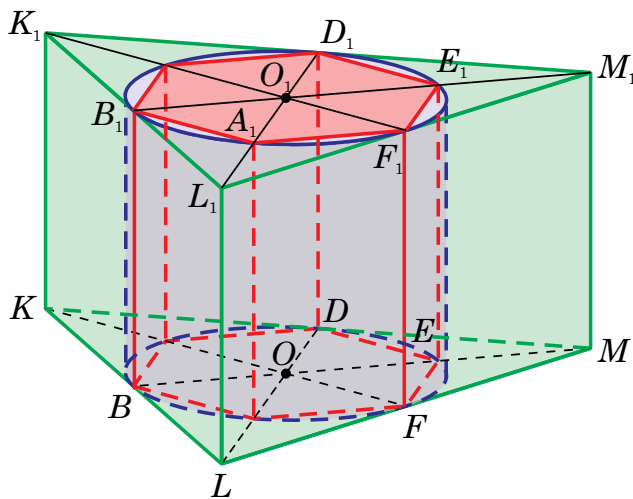
Тобто $AA_1 = \sqrt{538 - 369} = 13$ (см). Таким чином, $h = 13$ см — висота циліндра.

9) Отже, $S_{\pi} = 2\pi r(h + r)$, $S_{\pi} = 2\pi \cdot 6 \cdot (13 + 6) = 228\pi$ (см²).

Відповідь. 228π см².

9. У циліндр вписано правильну шестикутну призму, а навколо циліндра описано правильну трикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.

Розв'язання. 1) Правильна призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ вписана у циліндр з віссю OO_1 , а правильна призма $KL M K_1 L_1 M_1$ описана навколо циліндра (див. рисунок).



1) Нехай $OA = OB = OC = OD = OE = OF = r$ — радіуси основи циліндра, $OO_1 = h$ — висота циліндра.

2) Оскільки $\triangle KLM$ — правильний, то O — точка перетину медіан KF , LD і MB трикутника. Тобто $KO : OF = LO : OD = MO : OB = 2 : 1$, за властивістю медіан трикутника.

Тобто $OK = OL = OM = 2r$ і $CK = AL = EM = r$.

3) $\triangle OVK$ — прямокутний, $\angle KOV = 60^\circ$.

$\operatorname{tg} \angle KOV = \frac{VK}{OV}$, $BK = r \operatorname{tg} 60^\circ = r\sqrt{3}$. Таким чином, $KL = LM = MK = 2r\sqrt{3}$.

4) Оскільки $ABCDEF$ — правильний шестикутник, то $AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$, за властивістю правильного шестикутника.

5) Таким чином: $S_1 = P_{KLM} \cdot OO_1 = 3 \cdot 2r\sqrt{3} \cdot h = 6rh\sqrt{3}$ — площа бічної поверхні трикутної призми, $S_2 = P_{ABCDEF} \cdot OO_1 = 6 \cdot r \cdot h = 6rh$ — площа бічної поверхні шестикутної призми.

6) Отже, $S_2 : S_1 = 1 : \sqrt{3}$.

Відповідь. $1 : \sqrt{3}$.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Акумулятор 18650 має форму циліндра з діаметром 18 мм та довжиною 65 мм. Виробник упаковує такі акумулятори для роздрібної торгівлі поштучно в картонні упаковки, що мають форму прямокутного паралелепіпеда (див. рисунок). Які мінімальні розміри упаковки для одного акумулятора? Скільки картону потрібно виробнику, щоб виготовити упаковки для 1000 таких акумуляторів, якщо, крім самих граней упаковки, на з'єднувальні частини упаковки витрачається ще 25% матеріалу?



Розв'язання. 1) Довжина упаковки має бути не меншою за 65 мм, оскільки довжина батарейки становить 65 мм.

2) Якщо діаметр батарейки 18 мм, то мінімальні ширина та висота упаковки — 18 мм.

3) Отже, мінімальні розміри упаковки $18 \times 18 \times 65$ (мм).

4) $S_{\text{п}} = (18 \cdot 18 + 18 \cdot 65 + 18 \cdot 65) \cdot 2 = 5328$ (мм²) — площа поверхні прямокутного паралелепіпеда.

5) Тоді $5328 \cdot 1,25 = 6660$ (мм²) — площа картону, необхідного для виготовлення однієї упаковки, $6660 \cdot 1000 = 6660000$ (мм²) — площа картону, необхідного для виготовлення 1000 упаковок. Або 6660000 мм² = 6,66 м².

Відповідь. $18 \times 18 \times 65$ мм; 6,66 м².

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є прямокутник?
2. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є ромб?
3. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є ромб?
4. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є прямокутник, відмінний від квадрата?
5. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить поза призмою.
6. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить усередині призми.
7. Основою прямої призми є чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 123^\circ$, $\angle C = 144^\circ$, $\angle D = 57^\circ$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?

8. Основою прямої призми є чотирикутник, кути якого в послідовному порядку відносяться, як $3 : 5 : 8 : 6$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
9. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі, а гострий кут становить 60° . Чи можна вписати циліндр у цю призму?
10. Сума бічних сторін трапеції, яка є основою прямої призми, дорівнює 16 см, а середня лінія трапеції становить 7 см. Чи можна вписати циліндр у цю призму?

Рівень В

1. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 3 см, а висота — $5\sqrt{2}$ см, вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
2. Навколо циліндра, радіус якого дорівнює 8 см, а висота становить $6\sqrt{3}$ см, описано правильну трикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
3. В основі прямої призми лежить квадрат зі стороною 6 см. Бічні ребра призми дорівнюють по 10 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.
4. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Бічні ребра призми дорівнюють по 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.
5. Основа прямої призми — квадрат із діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму, якщо площа діагонального перерізу призми дорівнює $24\sqrt{2}$ см².
6. Основа прямої призми — прямокутник зі сторонами 7 см і 24 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.
7. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а навколо нього описано правильну шестикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
8. У циліндр вписано правильну шестикутну призму, а навколо нього описано правильну чотирикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Висота призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні становить 40 см². Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо цієї призми.
10. Основою прямої призми є ромб. Площа бічної поверхні призми дорівнює 120 см². Знайдіть радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, якщо висота призми дорівнює 6 см, а гострий кут основи становить 60° .

Рівень С

1. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а висота призми — h . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.
2. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a , а висота призми — H . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.

3. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної у циліндр.
4. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу бічної поверхні правильної шестикутної призми, описаної навколо циліндра.
5. У правильну чотирикутну призму вписано циліндр, радіус основи якого дорівнює R , а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
6. Навколо правильної трикутної призми описано циліндр, радіус основи якого r , а діагональ осьового перерізу утворює з твірною кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
7. У правильну трикутну призму вписано циліндр, висота якого дорівнює H , а радіус основи становить R . Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яких бічна поверхня циліндра дотикається до бічної поверхні призми.
8. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a , а висота становить H . У призму вписано циліндр. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яких бічна поверхня циліндра дотикається до двох сусідніх бічних граней призми.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом α при основі. Діагональ грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, описаного навколо призми, дорівнює R .
10. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник із кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, дорівнює r .

VII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було

-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-
-

Можливі теми учнівських проєктів

1. Площі поверхонь фігур, що є комбінаціями циліндра і призми.
2. Взаємне розташування циліндра і призми.
3. Дослідження спільних властивостей і відмінностей між призмами та циліндрами.
4. Симетрія в призмах і циліндрах, а також в геометричних фігурах, що є комбінаціями призм та циліндрів.
5. Побудова комбінацій призм та циліндрів засобами GeoGebra або інших сервісів. Властивості та ознаки.

Список використаної літератури

- 1) Істер О . С. Геометрія: (профіль. рівень): підручн. для 11 -го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – Київ : Генеза, 2019.
- 2) Ключко І. Я. Математика. Геометрія : ЗНО : завд. рівня стандарту : Комплексне видання для підготовки до ДПА у формі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021.
- 3) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Частина III (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. — 368 с.
- 4) Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень: підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019.
- 5) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл.: збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2011.
- 6) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл. профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2019.
- 7) Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручн. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019.