

Урок 3. Комбінація піраміди та конуса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

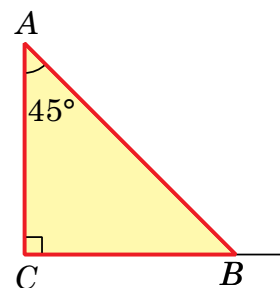
На уроці ви навчитеся:

- 1) розпізнавати піраміду та конус серед інших геометричних тіл;
- 2) називати основні елементи піраміди та конуса;
- 3) знаходити спільні властивості та відмінності між пірамідою та конусом;
- 4) моделювати комбінації піраміди та конуса;
- 5) порівнювати геометричні властивості піраміди й конуса;
- 6) розуміти значення поєднання різних фігур у практичних задачах;
- 7) аналізувати просторові форми у практичних задачах.

II. Повторення

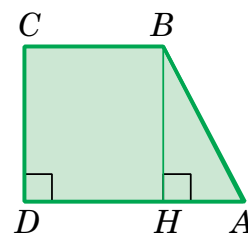
1. У прямокутному трикутнику $\angle A = 45^\circ$, $BC = 5$ см (див. рисунок). Знайдіть AB .

А	Б	В	Г	Д
6 см	7 см	$5\sqrt{2}$ см	$5\sqrt{3}$ см	10 см



2. У прямокутній трапеції $ABCD$ $AB = a$, $\angle BAH = \alpha$ (див. рисунок). Обчисліть CD .

А	Б	В	Г	Д
$a \cos \alpha$	$a \sin \alpha$	$\frac{a}{\sin \alpha}$	$\frac{a}{\cos \alpha}$	$a \operatorname{tg} \alpha$



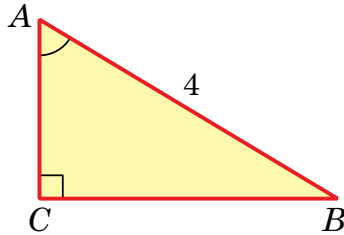
3. Діагоналі ромба дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть більший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
110°	120°	130°	135°	150°

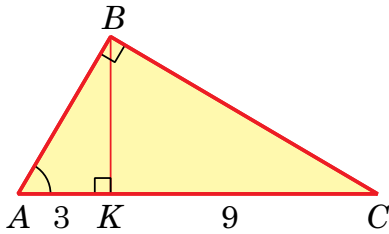
4. Установіть відповідність між кутом прямокутного трикутника (1–3) та градусною мірою (А–Д) кута.

Прямокутний трикутник

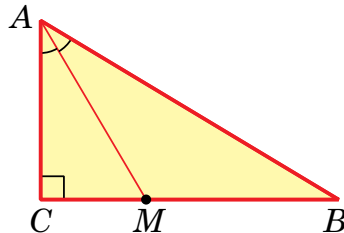
- 1 $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle A = ?$



- 2 $AK = 3$, $KC = 9$, $BK \perp AC$, $\angle A = ?$



- 3 $AM = 6$, AM — бісектриса, $\operatorname{tg} \angle CAM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle B = ?$



Градусна
міра кута

А 45°

Б 60°

В 50°

Г 30°

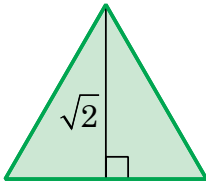
Д 15°

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

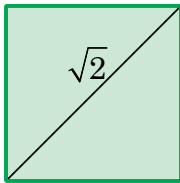
5. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1–3) та радіусом кола (А–Д), вписаного в цю фігуру. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Геометрична фігура

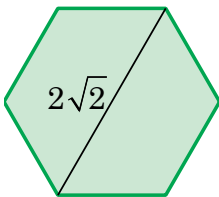
- 1 Правильний трикутник, висота якого дорівнює $\sqrt{2}$.



- 2 Квадрат, діагональ якого дорівнює $\sqrt{2}$.



- 3 Правильний шестикутник, більша діагональ якого дорівнює $2\sqrt{2}$.



Радіус кола,
вписаного
в геометричну
фігуру

А $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Б 1

В 0,5

Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$

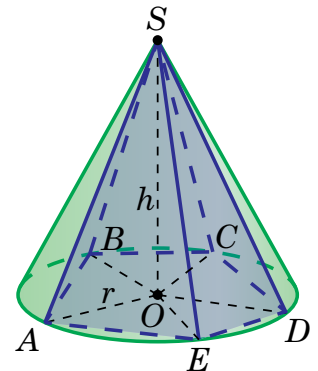
Д $\frac{\sqrt{2}}{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Піраміда, вписана в конус. Означення та властивості

Означення. Піраміду називають **вписаною в конус**, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина піраміди збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **описаним навколо піраміди**.

Наприклад, на рисунку піраміда $SABCDE$ вписана в конус з віссю SO .



Властивості піраміди, вписаної в конус

1. Основою вписаної в конус піраміди є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса.
2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину піраміди з центром кола, описаного навколо її основи, належить осі конуса.

Приклад 1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро становить 8 см. Знайдіть площу осового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай правильна піраміда $SABC$ вписана в конус із центром основи O (див. рисунок).

За умовою, $AB = BC = CA = 12$ см, $SA = SB = SC = 8$ см.

Знайдемо площу осового перерізу ASN конуса.

2) Оскільки $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a , то $OA = OB = OC = 4\sqrt{3}$ (см).

3) $\triangle AOS$ — прямокутний ($SO \perp OA$), $SO^2 = SA^2 - OA^2$, тобто

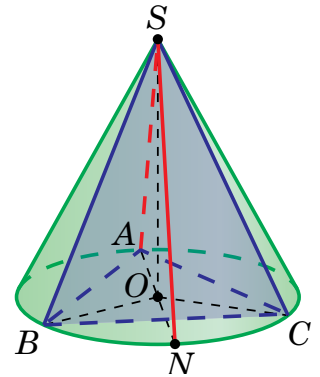
$$SO = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

4) $\triangle ASN$ — осовий переріз конуса.

$AN = 2OA = 8\sqrt{3}$ (см), як діаметр основи конуса, $SO = 4\sqrt{5}$ см.

$$\text{Тоді } S_{\triangle ASN} = \frac{1}{2} AN \cdot SO = \frac{8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 16\sqrt{15} \text{ (см}^2\text{)}.$$

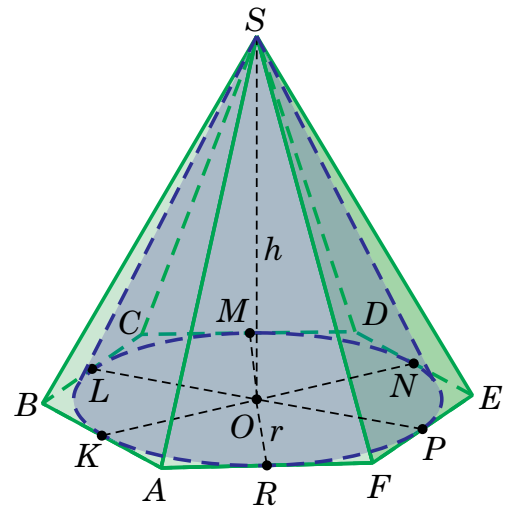
Відповідь. $16\sqrt{15}$ см².



IV. Піраміда, описана навколо конуса. Означення та властивості

Означення. Піраміду називають **описаною навколо конуса**, якщо її основу описано навколо основи конуса, а її вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **вписаним у піраміду**.

Наприклад, на рисунку піраміда $SABCDE$ описана навколо конуса з віссю SO .



Властивості піраміди, описаної навколо конуса

1. Основою піраміди, описаної навколо конуса, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса.
2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, вписаного у її основу, належить осі конуса.

Приклад 2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема — 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.

Розв'язання. 1) Нехай у правильну трикутну піраміду $SABC$ вписано конус із центром основи O (див. рисунок). За умовою: $AB = BC = CA = 18$ см, $SM = 9$ см — апофема.

2) Оскільки $SM \perp AB$ — апофема піраміди $SABC$ і $SO \perp (ABC)$, то $OM \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри. Таким чином, OM — радіус основи конуса.

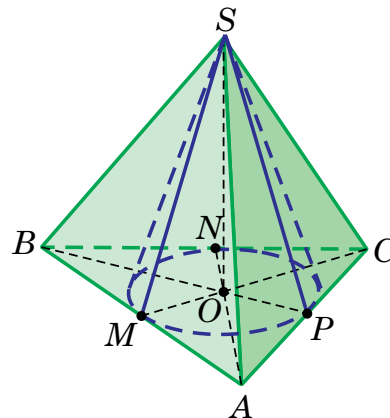
3) Оскільки $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радіус кола, вписаного у пра-

вильний трикутник зі стороною a , то $OM = ON = OP = 3\sqrt{3}$ см.

4) $\triangle SOM$ — прямокутний, $SO \perp (ABC)$, $SO^2 = SM^2 - OM^2$, тобто

$$SO = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

Відповідь. $3\sqrt{6}$ см.



V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Туристичний намет у формі конуса має висоту 2,5 м і діаметр основи 4 м. Всередині намету зроблено каркас у формі правильної шестикутної піраміди, вписаної в цей конус. Обчисліть довжину ребра основи каркаса та довжину його бічного ребра, які потрібно замінити, оскільки вони поламалися.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. У конус вписано піраміду, основою якої є тупокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, який є основою піраміди?
2. У конус вписано піраміду, основою якої є гострокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, який є основою піраміди?
3. У конус вписана піраміда, основою якої є прямокутний трикутник. Доведіть, що висотою конуса є висота грані піраміди, що містить гіпотенузу трикутника основи.
4. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, бічна грань піраміди нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу основи конуса, вписаного в піраміду.
5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть площу основи конуса, описаного навколо піраміди.

6. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з висотою кут 45° . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
7. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см і утворює з висотою кут 60° . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в піраміду.
8. Основою піраміди є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 18 см і утворює з діагоналлю прямокутника кут 60° . Усі бічні ребра піраміди дорівнюють по 12 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Рівень В

1. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
2. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою 15 см і катетом 12 см. Висота кожної бічної грані піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в піраміду.
3. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
4. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона становить 10 см. У піраміду вписано конус. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, якщо його висота дорівнює 9 см.
5. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30° . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в піраміду.
6. Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус основи конуса становить 6 см. Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є рівнобічна трапеція з бічною стороною 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
7. Висота конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з твірною кут 30° . Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є трапеція, середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
8. У правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 24 см, вписано конус. Обчисліть площу повної поверхні конуса, якщо площа бічної поверхні піраміди у п'ять разів більша за площу її основи.

Рівень С

1. Основи зрізаної піраміди — квадрати, площі яких дорівнюють 16 см^2 і 36 см^2 , а площа її бічної поверхні становить 40 см^2 . Знайдіть площу осевого перерізу зрізаного конуса, вписаного в цю зрізану піраміду.
2. Площа осевого перерізу зрізаного конуса, описаного навколо зрізаної чотирикутної піраміди, дорівнює $5\sqrt{14}\text{ см}^2$. Основи зрізаної піраміди — квадрати зі сторонами 4 см і 16 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса

3. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює c , а гострий кут — β . Двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Знайдіть площу осового перерізу конуса, вписаного в піраміду.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q , а гострий кут — α . Бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть площу осового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
5. Один конус вписано в правильну шестикутну піраміду, а другий описано навколо неї. Знайдіть відношення площ повних поверхонь конусів, якщо двогранний кут при основі піраміди дорівнює α .
6. Навколо конуса описано трикутну піраміду. Бічна поверхня конуса лініями дотику ділиться на три частини пропорційно числам 5, 6 і 7. У якому відношенні ці лінії ділять бічну поверхню піраміди?
7. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α . Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут β . Відстань від основи висоти піраміди до бічної сторони трапеції дорівнює b . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.
8. У піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом β , вписано конус. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють α . Відстань від основи висоти піраміди до вершини тупого кута трапеції дорівнює a . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

- 1.** Площі поверхонь фігур, які є комбінаціями піраміди й конуса.
- 2.** Взаємне розташування піраміди й конуса.
- 3.** Дослідження спільних властивостей і відмінностей між пірамідами та конусами.
- 4.** Симетрія в пірамідах та конусах, а також в геометричних фігурах, які є комбінаціями піраміди й конуса.
- 5.** Побудова комбінацій піраміди й конуса засобами GeoGebra або інших сервісів. Властивості та ознаки.







