

Урок 3. Комбінація піраміди та конуса

План уроку

1. Піраміда, вписана в конус. Означення та властивості.
2. Піраміда, описана навколо конуса. Означення та властивості.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані й зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

добирає і фіксує інформацію з різних джерел [12 МАО 2.1.2-1];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями і враховуючи емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2-1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2-2];

визначає, яких даних недостатньо для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-2];

класифікує й структурує математичні поняття та факти [12 МАО 4.1.2-1];

визначає прогалини у власних математичних знаннях і вміннях [12 МАО 4.1.3-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні задачі. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

8) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Що спільного між пірамідою та конусом? Чим відрізняються ці фігури?

2) Чи може поверхня піраміди бути дотичною до поверхні конуса?

3) Чи можна створити геометричну фігуру, яка одночасно матиме ознаки піраміди та конуса?

4) Чи зустрічали ви у навколишньому середовищі комбінації піраміди та конуса? Якщо так, то наведіть приклади.

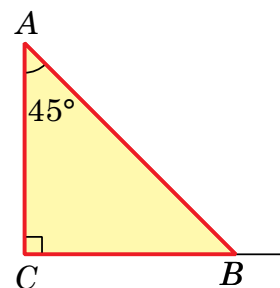
5) Чи важливо в практичних задачах уміти комбінувати піраміду та конус?

II. Повторення (4–5 хв)

1. У прямокутному трикутнику $\angle A = 45^\circ$, $BC = 5$ см (див. рисунок). Знайдіть AB .

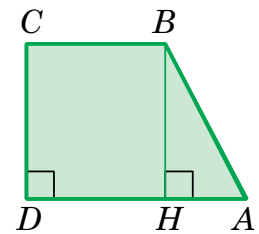
А	Б	В	Г	Д
6 см	7 см	$5\sqrt{2}$ см	$5\sqrt{3}$ см	10 см

Відповідь. В.



2. У прямокутній трапеції $ABCD$ $AB = a$, $\angle BAN = \alpha$ (див. рисунок). Обчисліть CD .

А	Б	В	Г	Д
$a \cos \alpha$	$a \sin \alpha$	$\frac{a}{\sin \alpha}$	$\frac{a}{\cos \alpha}$	$a \operatorname{tg} \alpha$



Відповідь. Б.

3. Діагоналі ромба дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть більший кут ромба.

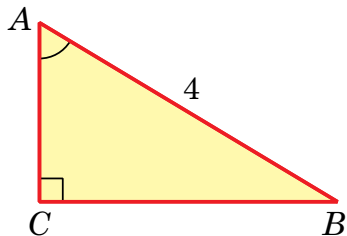
А	Б	В	Г	Д
110°	120°	130°	135°	150°

Відповідь. Б.

4. Установіть відповідність між кутом прямокутного трикутника (1–3) та градусною мірою (А–Д) кута.

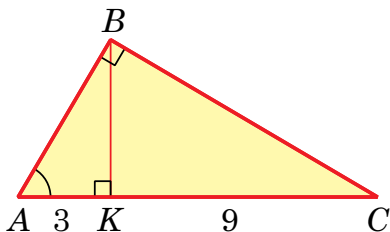
Прямокутний трикутник

- 1 $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle A = ?$

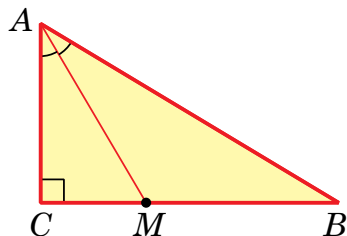


Градусна міра кута	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
А 45°					
Б 60°					
В 50°					
Г 30°					
Д 15°					

- 2 $AK = 3$, $KC = 9$, $BK \perp AC$, $\angle A = ?$



- 3 $AM = 6$, AM — бісектриса, $\operatorname{tg} \angle CAM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle B = ?$

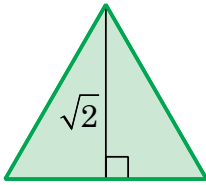


Відповідь. 1 – А; 2 – Б; 3 – Г.

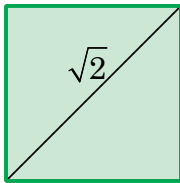
5. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1–3) та радіусом кола (А–Д), вписаного в цю фігуру. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Геометрична фігура

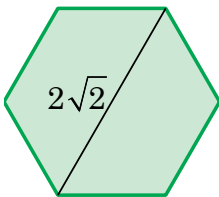
- 1 Правильний трикутник, висота якого дорівнює $\sqrt{2}$.



- 2 Квадрат, діагональ якого дорівнює $\sqrt{2}$.



- 3 Правильний шестикутник, більша діагональ якого дорівнює $2\sqrt{2}$.



Відповідь. 1 – Д; 2 – В; 3 – А.

Радіус кола,
вписаного
в геометричну
фігуру

А $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Б 1

В 0,5

Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Д $\frac{\sqrt{2}}{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Як я вирішую певну проблему?

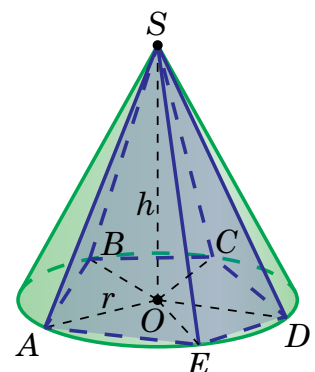
Задача. Туристичний намет у формі конуса має висоту 2,5 м і діаметр основи 4 м. Всередині намету зроблено каркас у формі правильної шестикутної піраміди, вписаної в цей конус. Обчисліть довжину ребра основи каркаса та довжину його бічного ребра, які потрібно замінити, оскільки вони поламалися.



III. Піраміда, вписана в конус. Означення та властивості (5 хв)

Означення. Піраміду називають **вписаною в конус**, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина піраміди збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **описаним навколо піраміди**.

Наприклад, на рисунку піраміда $SABCDE$ вписана в конус з віссю SO .



Властивості піраміди, вписаної в конус

1. Основою вписаної в конус піраміди є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса.
2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину піраміди з центром кола, описаного навколо її основи, належить осі конуса.

Ілюстративні задачі (8–10 хв)

6. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро становить 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай правильна піраміда $SABC$ вписана в конус із центром основи O (див. рисунок).

За умовою, $AB = BC = CA = 12$ см, $SA = SB = SC = 8$ см.

Знайдемо площу осьового перерізу ASN конуса.

2) Оскільки $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a , то $OA = OB = OC = 4\sqrt{3}$ (см).

3) $\triangle AOS$ — прямокутний ($SO \perp OA$), $SO^2 = SA^2 - OA^2$, тобто

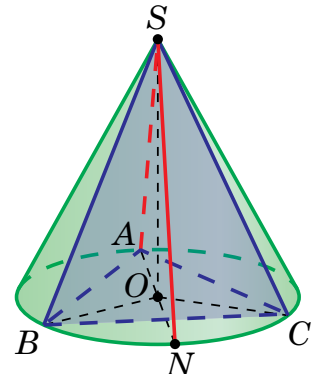
$$SO = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

4) $\triangle ASN$ — осьовий переріз конуса.

$AN = 2OA = 8\sqrt{3}$ (см), як діаметр основи конуса, $SO = 4\sqrt{5}$ см.

$$\text{Тоді } S_{\triangle ASN} = \frac{1}{2} AN \cdot SO = \frac{8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 16\sqrt{15} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. $16\sqrt{15}$ см².



7. Правильна шестикутна піраміда вписана в конус. Периметр основи піраміди дорівнює 60 см, а площа бічної поверхні конуса становить 130π см². Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай правильну піраміду $SABCDEF$ вписано у конус із центром основи O (див. рисунок).

2) $AB = BC = CD = DE = EF = FA = \frac{60}{6} = 10$ (см), за умовою,

бо $P_{ABCDEF} = 60$ см.

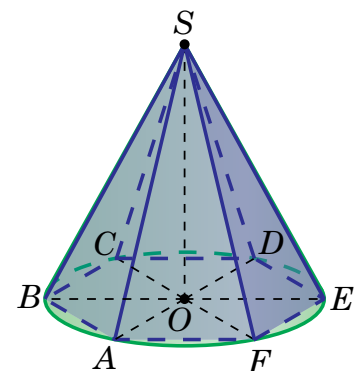
3) $OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = 10$ (см), за властивістю правильного шестикутника.

4) Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{б.к.}} = \pi r l$, тому $l = S_{\text{б.к.}} / \pi r$. Оскільки $S_{\text{б.к.}} = 130\pi$ см² — площа бічної поверхні конуса, за умовою, а $r = 10$ см — радіус його основи, то: $SA = SB = SC = SD = SE = SF = \frac{130\pi}{10\pi} = 13$ (см).

5) Розглянемо $\triangle ASB$: $SA = SB = 13$ см, $AB = 10$ см.

За формулою Герона, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Оскільки $p = 18$ см — півпериметр трикутника ASB , то $S_{\triangle ASB} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 60$ (см²).

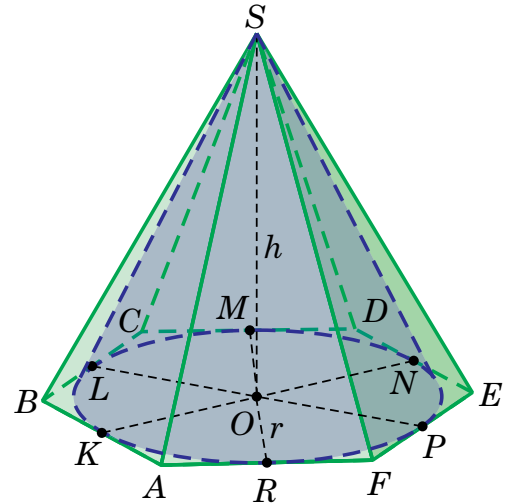


6) Тоді площа бічної поверхні піраміди: $S_{\text{б.п.}} = 6 \cdot S_{\Delta ASB} = 6 \cdot 60 = 360 \text{ (см}^2\text{)}$.
Відповідь. 360 см^2 .

IV. Піраміда, описана навколо конуса. Означення та властивості (5 хв)

Означення. Піраміду називають **описаною навколо конуса**, якщо її основу описано навколо основи конуса, а її вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **вписаним у піраміду**.

Наприклад, на рисунку піраміда $SABCDE$ описана навколо конуса з віссю SO .



Властивості піраміди, описаної навколо конуса

1. Основою піраміди, описаної навколо конуса, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса.
2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, вписаного у її основу, належить осі конуса.

Ілюстративні задачі (8–10 хв)

8. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема — 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.

Розв'язання. 1) Нехай у правильну трикутну піраміду $SABC$ вписано конус із центром основи O (див. рисунок). За умовою: $AB = BC = CA = 18 \text{ см}$, $SM = 9 \text{ см}$ — апофема.

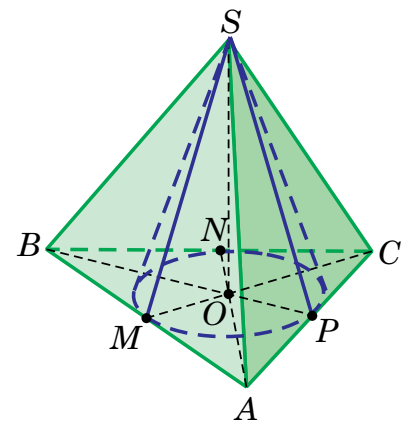
2) Оскільки $SM \perp AB$ — апофема піраміди $SBAC$ і $SO \perp (ABC)$, то $OM \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри. Таким чином, OM — радіус основи конуса.

3) Оскільки $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — радіус кола, вписаного у правильний трикутник зі стороною a , то $OM = ON = OP = 3\sqrt{3} \text{ см}$.

4) ΔSOM — прямокутний, $SO \perp (ABC)$, $SO^2 = SM^2 - OM^2$, тобто

$$SO = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

Відповідь. $3\sqrt{6} \text{ см}$.



9. Конус, радіус основи якого дорівнює 3 см, а твірна становить 5 см, вписаний у чотирикутну піраміду $SABCD$. Основою піраміди є рівнобічна трапеція $ABCD$, $AD \parallel BC$, бічна сторона якої дорівнює 10 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки вершина піраміди проектується в центр O вписаного в трапецію $ABCD$ кола, то двогранні кути між бічними гранями піраміди та її основою рівні.

3) SO — висота піраміди, OK, OL, OM, ON — радіуси вписаного кола, проведені в точки дотику кола й ребер AB, BC, CD та AD відповідно. Тоді $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$, за властивістю радіуса кола, проведеного в точку дотику дотичної з колом.

4) За теоремою про три перпендикуляри, $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp CD$, $SN \perp AD$.

5) Отже, кути SKO, SLO, SMO та SNO — лінійні кути двограних кутів між бічними гранями та основою піраміди. Нехай $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = \angle SNO = \alpha$.

6) $\triangle SOK$ — прямокутний. Тоді $\cos \alpha = \frac{OK}{SK}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

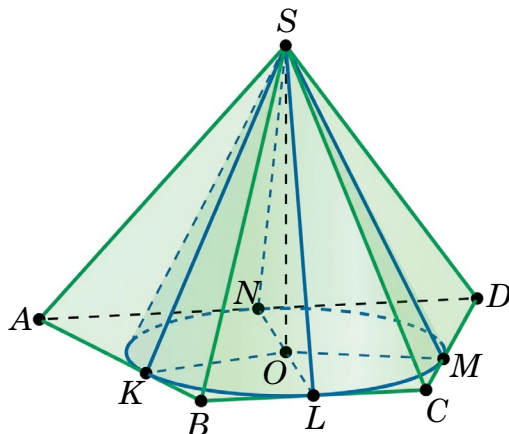
7) Якщо двогранні кути при основі піраміди рівні, то $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$, за наслідком теореми про площу ортогональної проекції.

8) У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD = 10$ см) $BC + AD = AB + CD = 20$ (см), за властивістю описаного чотирикутника, $LN = 2OL = 6$ (см) — висота трапеції.

9) Площа трапеції $ABCD$: $S_{\text{осн}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot LN$, $S_{\text{осн}} = 10 \cdot 6 = 60$ (см²).

10) Отже, $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} = 100$ (см²).

Відповідь. 100 см².



V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Туристичний намет у формі конуса має висоту 2,5 м і діаметр основи 4 м. Всередині намету зроблено каркас у формі правильної шестикутної піраміди, вписаної в цей конус. Обчисліть довжину ребра основи каркаса та довжину його бічного ребра, які потрібно замінити, оскільки вони поламалися.

Розв'язання.

1) Розглянемо конус з висотою $h = 2,5$ м і діаметром основи $d = 4$ м.

2) Тоді $r = \frac{d}{2} = 2$ (м) — радіус основи конуса.

3) $a = r = 2$ (м) — ребро основи каркаса, за властивістю правильного шестикутника.



4) Якщо l — довжина бічного ребра каркаса, то $l^2 = h^2 + r^2$, за теоремою Піфагора, тобто $l = \sqrt{2,5^2 + 2^2} = 0,5\sqrt{41} \approx 3,2$ (м).

Відповідь. 2 м; 3,2 м.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. У конус вписано піраміду, основою якої є тупокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, який є основою піраміди?
2. У конус вписано піраміду, основою якої є гострокутний трикутник. Як розташована основа висоти конуса відносно трикутника, який є основою піраміди?
3. У конус вписана піраміда, основою якої є прямокутний трикутник. Доведіть, що висотою конуса є висота грані піраміди, що містить гіпотенузу трикутника основи.
4. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, бічна грань піраміди нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу основи конуса, вписаного в піраміду.
5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть площу основи конуса, описаного навколо піраміди.
6. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з висотою кут 45° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
7. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см і утворює з висотою кут 60° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.
8. Основою піраміди є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 18 см і утворює з діагоналлю прямокутника кут 60° . Усі бічні ребра піраміди дорівнюють по 12 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Рівень В

1. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
2. Основою трикутної піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою 15 см і катетом 12 см. Висота кожної бічної грані піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.
3. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
4. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона становить 10 см. У піраміду вписано конус. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його висота дорівнює 9 см.
5. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.

6. Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус основи конуса становить 6 см. Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є рівнобічна трапеція з бічною стороною 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
7. Висота конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з твірною кут 30° . Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є трапеція, середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
8. У правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 24 см, вписано конус. Обчисліть площу повної поверхні конуса, якщо площа бічної поверхні піраміди у п'ять разів більша за площу її основи.

Рівень С

1. Основи зрізаної піраміди — квадрати, площі яких дорівнюють 16 см^2 і 36 см^2 , а площа її бічної поверхні становить 40 см^2 . Знайдіть площу осцевого перерізу зрізаного конуса, вписаного в цю зрізану піраміду.
2. Площа осцевого перерізу зрізаного конуса, описаного навколо зрізаної чотирикутної піраміди, дорівнює $5\sqrt{14}\text{ см}^2$. Основи зрізаної піраміди — квадрати зі сторонами 4 см і 16 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса.
3. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює c , а гострий кут — β . Двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Знайдіть площу осцевого перерізу конуса, вписаного в піраміду.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q , а гострий кут — α . Бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть площу осцевого перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
5. Один конус вписано в правильну шестикутну піраміду, а другий описано навколо неї. Знайдіть відношення площ повних поверхонь конусів, якщо двогранний кут при основі піраміди дорівнює α .
6. Навколо конуса описано трикутну піраміду. Бічна поверхня конуса лініями дотику ділиться на три частини пропорційно числам 5, 6 і 7. У якому відношенні ці лінії ділять бічну поверхню піраміди?
7. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α . Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут β . Відстань від основи висоти піраміди до бічної сторони трапеції дорівнює b . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.
8. У піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом β , вписано конус. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють α . Відстань від основи висоти піраміди до вершини тупого кута трапеції дорівнює a . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

VII. Рефлексія (2 хв)

Запропонуйте учням оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми учнівських проєктів

1. Площі поверхонь фігур, які є комбінаціями піраміди й конуса.
2. Взаємне розташування піраміди й конуса.
3. Дослідження спільних властивостей і відмінностей між пірамідами та конусами.
4. Симетрія в пірамідах та конусах, а також в геометричних фігурах, які є комбінаціями піраміди й конуса.
5. Побудова комбінацій піраміди й конуса засобами GeoGebra або інших сервісів. Властивості та ознаки.

Список використаної літератури

- 1) Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень: підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, — К.: УОВЦ «Оріон», 2020.
- 2) Істер О. С. Геометрія: (профіль. рівень): підручн. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єрміна. — Київ : Генеза, 2019.
- 3) Ключко І. Я. Математика. Геометрія : ЗНО : завд. рівня стандарту : Комплексне видання для підготовки до ДПА у формі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2021.
- 4) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Частина ІІІ (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2018. — 368 с.

- 5) Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень: підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019.
- 6) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл.: збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2011.
- 7) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл. профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019.
- 8) Моргун О. О. Збірник задач зі стереометрії. 11 клас. — Х.: Вид. група «Основа», 2010. — 128 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 8 (92)).