

Урок 4. Урок-практикум. Розв'язування задач. Комбінація піраміди та конуса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) використовувати формули для знаходження площі поверхні піраміди;
- 2) використовувати формули для знаходження площі поверхні конуса;
- 3) знаходити площу поверхні комбінованих фігур із піраміди та конуса;
- 4) правильно добирати формули для розрахунків;
- 5) застосовувати знання про комбінації піраміди та конуса до розв'язування задач;
- 6) використовувати знання про комбінації піраміди та конуса для аналізу життєвих ситуацій.

II. Повторення

1. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 4 см. Знайдіть периметр квадрата.

А	Б	В	Г	Д
8 см	16 см	24 см	32 см	64 см

2. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, менша сторона якого дорівнює 4 см, а кут між діагоналями становить 60° .

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см

3. Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника ABC зі стороною $AB = 4$ см і кутом C , величина якого становить 30° .

А	Б	В	Г	Д
$4\pi \text{ см}^2$	$8\pi \text{ см}^2$	$12\pi \text{ см}^2$	$16\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$

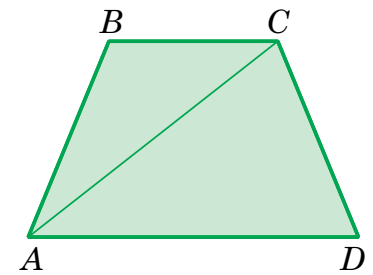
4. На рисунку зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, у якій $AD = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 10$ см. Установіть відповідність між проекцією (1–3) відрізка на пряму та довжиною проєкції (А–Д). (Пробне ЗНО, 2013 р.).

Проекція відрізка на пряму

- 1 проекція відрізка BC на пряму AD
- 2 проекція відрізка CD на пряму AD
- 3 проекція відрізка AC на пряму AD

Довжина проєкції

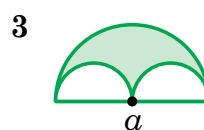
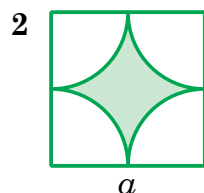
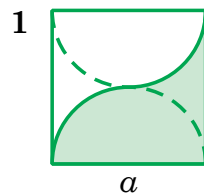
- А 2 см
- Б 4 см
- В 4,8 см
- Г 5,6 см
- Д 6 см



	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

5. Установіть відповідність між зафарбованою фігурою (1–3) та площею (А–Д) цієї фігури.

Фігура

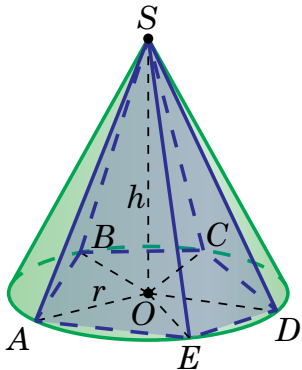
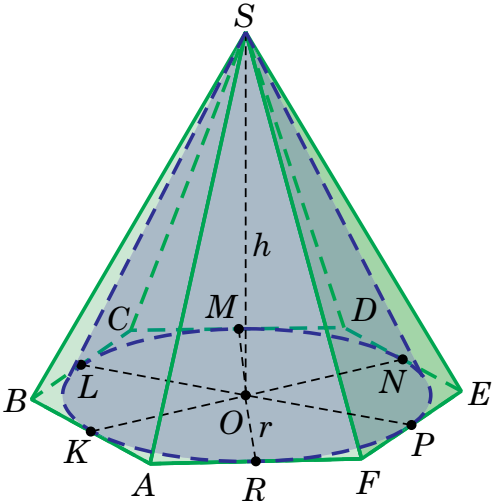


Площа фігури

- А $\frac{\pi a^2}{16}$
- Б $\frac{\pi a^2}{8}$
- В $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- Г $0,5a^2$
- Д $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

III. Короткі теоретичні відомості з теми

Піраміда, вписана в конус	Піраміда, описана навколо конуса.
	
Властивості 1. Основою вписаної в конус піраміди є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса. 2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, описаного навколо її основи, належить осі конуса.	Властивості 1. Основою піраміди, описаної навколо конуса, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса. 2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, вписаного у її основу, належить осі конуса.

IV. Розв'язування найпростіших задач на доведення

При розв'язуванні задач даної теми на доведення та обчислення елементів фігур важливо дотримуватися наступних порад:

- уявіть просторову фігуру;
- розпочніть доведення або обчислення з побудови рисунка;
- підберіть планіметричний аналог просторовій задачі;
- використовуйте властивості вписаних й описаних кіл;
- використовуйте властивості правильних багатокутників;
- звертайте увагу на симетрію;
- пам'ятайте співвідношення між елементами піраміди та елементами конуса;
- не забувайте про тригонометричні співвідношення між сторонами й кутами трикутників;
- застосовуйте відомі факти з геометрії кола.

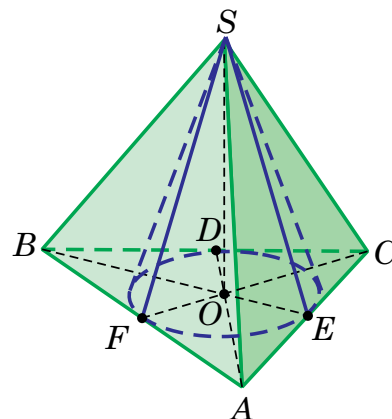
Приклад 1. У правильну трикутну піраміду вписано конус. Доведіть, що центр основи конуса збігається з точкою перетину висот основи піраміди.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки основа конуса — круг, вписаний в основу призми, то центр O цього круга є точкою перетину бісектрис AD , BE та CF трикутника ABC .

3) $\triangle ABC$ — правильний, тому бісектриси AD , BE та CF є висотами цього трикутника, за властивістю правильного трикутника.

4) Отже, O — точка перетину висот трикутника ABC , що і треба було довести.



V. Розв'язування задач на обчислення

Приклад 2. У конус вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайдіть твірну конуса.

Розв'язання. 1) Розглянемо правильну трикутну піраміду $SABC$, вписану в конус із центром основи точкою O (див. рисунок). За умовою, $AB = BC = CA = 6\sqrt{3}$ (см), $\angle OCS = 60^\circ$.

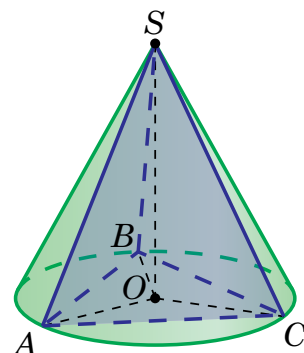
2) Нехай $OA = OB = OC = R$ — радіус основи конуса. Тоді

$$R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ (см)}.$$

3) $\triangle COS$ — прямокутний, $\angle COS = 90^\circ$, $\frac{OC}{SC} = \cos \angle OCS$.

$$\text{Тобто } SC = \frac{6}{\cos 60^\circ} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 12 см.



VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для театральної вистави виготовили декорацію у формі правильної чотирикутної піраміди. У середині піраміди, у її вершині, встановили ліхтар. Світловий потік від ліхтаря поширюється у вигляді конуса, вписаного в піраміду. Основа конуса належить основі піраміди та дотикається до сторін основи піраміди. Знайдіть висоту світлового потоку, якщо апофема піраміди становить 0,6 м, а периметр її основи дорівнює 2,4 м.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро становить 8 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота становить 5 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
3. Основою піраміди є трикутник зі стороною a та протилежним їй кутом α , а кут між кожним бічним ребром і площиною основи дорівнює β . Знайдіть висоту та твірну конуса, описаного навколо даної піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди дорівнює 12 см. Вершина піраміди проектується в середину гіпотенузи. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
5. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами $4\sqrt{7}$ см і 12 см, а кожне бічне ребро піраміди дорівнює 17 см. Знайдіть площу осевого перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
6. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота становить 6 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.
7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема становить 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.
8. У конус із радіусом основи 6 см і висотою 8 см вписана правильна трикутна піраміда. Знайдіть довжину сторони основи піраміди.
9. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус. Сторона основи піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть радіус основи конуса.
10. У правильну трикутну піраміду вписаний конус. Сторона основи піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.

Рівень В

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.
3. Навколо конуса описано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
4. Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

5. Основа піраміди — прямокутник, менша зі сторін якого дорівнює a , а кут між діагоналями становить α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
6. Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетом b і прилеглим до нього гострим кутом α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
7. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і прилеглим до неї кутом α . Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
8. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а висота піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
9. Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює m . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
10. Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює β , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює d . Знайдіть площу осцевого перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.

Рівень С

1. Доведіть, що коли в піраміду $MABCD$ можна вписати конус, то сума площ граней AMB і CMD дорівнює сумі площ граней AMD і BMC .
2. Доведіть, що коли в піраміді $MABCD$ сума площ граней AMB і CMD дорівнює сумі площ граней AMD і BMC , то в дану піраміду можна вписати конус.
3. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є ромб зі стороною a і кутом α , а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть площу осцевого перерізу даного конуса.
4. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом α при основі. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.
5. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
6. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, а висота піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.
7. У зрізаний конус вписано правильну зрізану трикутну піраміду. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 18 см, а висота становить 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
8. Навколо правильної зрізаної чотирикутної піраміди описано зрізаний конус. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо сторони основ зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а її висота становить $2\sqrt{7}$ см.

9. У правильну зрізану чотирикутну піраміду вписано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 5 см і 7 см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює 45° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
10. Навколо зрізаного конуса описано правильну зрізану трикутну піраміду, сторони основ якої дорівнюють 18 см і 24 см, а бічне ребро становить 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Обчислення площ поверхонь фігур, утворених пірамідою та конусом.
2. Класифікація та розв'язування задач на комбінації піраміди та конуса. Використання комбінованих тіл у стереометричних задачах.
3. Конструювання та розв'язування власних задач на комбінації піраміди й конуса.
4. Побудова перерізів геометричних фігур, які є комбінаціями піраміди й конуса.







