

Урок 4. Урок-практикум. Розв'язування задач. Комбінація піраміди та конуса

План уроку

1. Короткі теоретичні відомості з теми.
2. Розв'язування найпростіших задач на доведення.
3. Розв'язування задач на обчислення.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки комплексних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 MAO 1.1.2-1];

досліджує комплексну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 MAO 1.2.1-1];

пропонує шляхи досягнення результатів розв'язання проблемної ситуації, передбачаючи можливі ризики [12 MAO 1.3.2-1];

планує дії та співпрацює у групі для розв'язання комплексних проблемних ситуацій [12 MAO 2.2.3-1];

визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними [12 MAO 2.3.1-1];

за потреби, змінює модель або її компоненти відповідно до особливостей проблемної ситуації [12 MAO 2.3.3-1];

представляє результати самостійної роботи та/або у співпраці з іншими [12 MAO 2.4.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теоретичні відомості наведені першим пунктом. Пропонуйте учням пригадати вивчений матеріал теми перед розв'язуванням задач.
- 5) Урок-практикум містить добірку задач на доведення та на обчислення. Обирайте ілюстративні задачі на власний розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 10) Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 11) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Уявіть намет у формі конуса. Чи може каркас такого намету бути пірамідою?
- 2) В яких практичних задачах можна поєднати піраміду й конус?
- 3) Як зміниться простір усередині конуса, якщо в конус вписати піраміду?
- 4) Чи можна розмістити конус усередині піраміди так, щоб бічна поверхня конуса дотикалася до всіх граней піраміди?
- 5) Уявіть декоративну упаковку у формі конуса, в який вписана піраміда. Як змінюються твірні конуса при збільшенні основи піраміди?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 4 см. Знайдіть периметр квадрата.

А	Б	В	Г	Д
8 см	16 см	24 см	32 см	64 см

Відповідь. Г.

2. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, менша сторона якого дорівнює 4 см, а кут між діагоналями становить 60° .

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см

Відповідь. В.

3. Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника ABC зі стороною $AB = 4$ см і кутом C , величина якого становить 30° .

А	Б	В	Г	Д
$4\pi \text{ см}^2$	$8\pi \text{ см}^2$	$12\pi \text{ см}^2$	$16\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$

Відповідь. Г.

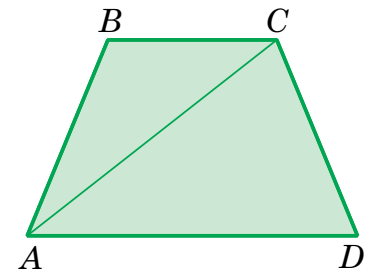
4. На рисунку зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, у якій $AD = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 10$ см. Установіть відповідність між проекцією (1–3) відрізка на пряму та довжиною проєкції (А–Д). (Пробне ЗНО, 2013 р.).

Проекція відрізка на пряму

- 1 проекція відрізка BC на пряму AD
- 2 проекція відрізка CD на пряму AD
- 3 проекція відрізка AC на пряму AD

Довжина проєкції

- А 2 см
- Б 4 см
- В 4,8 см
- Г 5,6 см
- Д 6 см

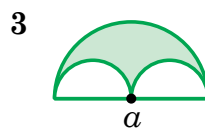
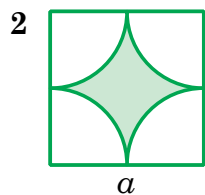
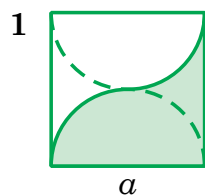


	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Б; 2 – А; 3 – Д.

5. Установіть відповідність між зафарбованою фігурою (1–3) та площею (А–Д) цієї фігури.

Фігура



Площа фігури

- А $\frac{\pi a^2}{16}$
- Б $\frac{\pi a^2}{8}$
- В $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- Г $0,5a^2$
- Д $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)$

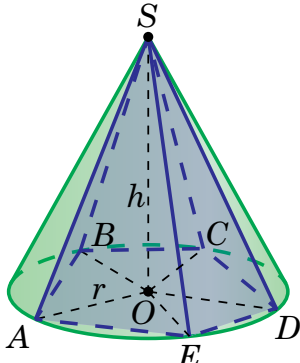
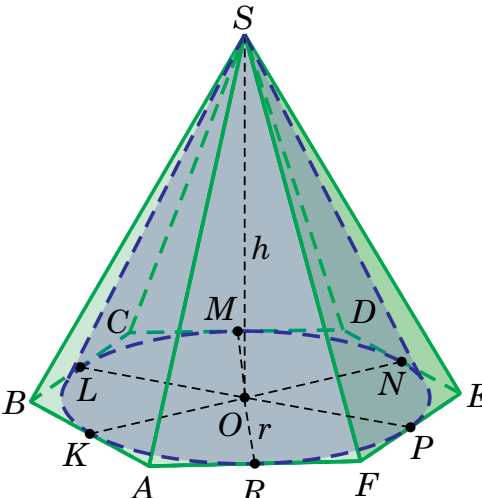
	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

Відповідь. 1 – Г; 2 – В; 3 – А.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для театральної вистави виготовили декорацію у формі правильної чотирикутної піраміди. Усередині піраміди, у її вершині, встановили ліхтар. Світловий потік від ліхтаря поширюється у вигляді конуса, вписаного в піраміду. Основа конуса належить основі піраміди та дотикається до сторін основи піраміди. Знайдіть висоту світлового потоку, якщо апофема піраміди становить 0,6 м, а периметр її основи дорівнює 2,4 м.

III. Короткі теоретичні відомості з теми (3 хв)

Піраміда, вписана в конус	Піраміда, описана навколо конуса.
	
Властивості 1. Основою вписаної в конус піраміди є багатокутник, навколо якого можна описати коло, причому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса. 2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, описаного навколо її основи, належить осі конуса.	Властивості 1. Основою піраміди, описаної навколо конуса, є багатокутник, у який можна вписати коло. При цьому радіус цього кола дорівнює радіусу r основи конуса. 2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, вписаного у її основу, належить осі конуса.

IV. Розв'язування найпростіших задач на доведення (8–10 хв)

При розв'язуванні задач даної теми на доведення та обчислення елементів фігур важливо дотримуватися наступних порад:

- уявіть просторову фігуру;
- розпочніть доведення або обчислення з побудови рисунка;
- підберіть планіметричний аналог просторовій задачі;
- використовуйте властивості вписаних й описаних кіл;
- використовуйте властивості правильних багатокутників;
- звертайте увагу на симетрію;
- пам'ятайте співвідношення між елементами піраміди та елементами конуса;

- не забувайте про тригонометричні співвідношення між сторонами й кутами трикутників;
- застосовуйте відомі факти з геометрії кола.

Ілюстративні задачі

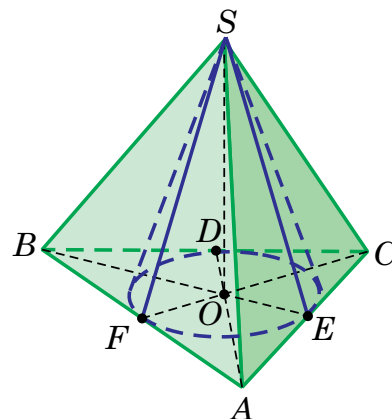
- 6.** У правильну трикутну піраміду вписано конус. Доведіть, що центр основи конуса збігається з точкою перетину висот основи піраміди.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки основа конуса — круг, вписаний в основу призми, то центр O цього круга є точкою перетину бісектрис AD , BE та CF трикутника ABC .

3) $\triangle ABC$ — правильний, тому бісектриси AD , BE та CF є висотами цього трикутника, за властивістю правильного трикутника.

4) Отже, O — точка перетину висот трикутника ABC , що і треба було довести.



- 7.** Навколо прямого конуса описано правильну чотирикутну піраміду. Доведіть, що радіус основи конуса дорівнює половині ребра основи піраміди.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Основою піраміди є квадрат $ABCD$ зі стороною a . Точка O — точка перетину діагоналей AC та BD квадрата — є центром кола, вписаного в квадрат. Точки K, L, M, N — точки дотику кола зі сторонами AB, BC, CD, DA квадрата.

3) Оскільки $OK \perp AB$, за властивістю радіуса, проведеного в точку дотику, і $\triangle AOB$ — рівнобедрений, то точка K — середина AB , за властивістю рівнобедреного трикутника.

4) OK — середня лінія трикутника ABD , точка K — середина AB , точка O — середина BD . Тобто $OK = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2}$.

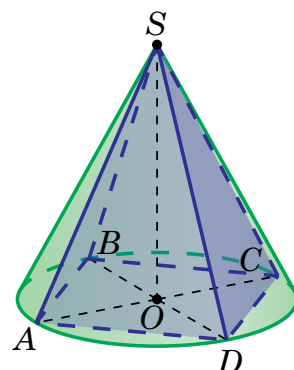
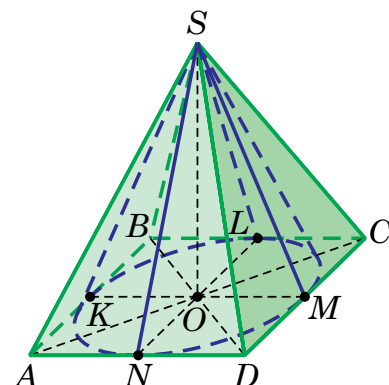
5) Отже, $OK = OL = OM = ON = \frac{a}{2}$, що і треба було довести.

- 8.** Навколо правильної чотирикутної піраміди, в основі якої квадрат зі стороною a , описано конус. Доведіть, що радіус основи конуса дорівнює $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Основою даної піраміди є квадрат $ABCD$ зі стороною a . Точка O — точка перетину діагоналей AC та BD квадрата — є центром кола, описаного навколо квадрата. Тоді AO, BO, CO і DO — радіуси цього кола.

3) Таким чином, $AC = BD = a\sqrt{2}$, за властивістю квадрата.



4) Отже, оскільки O — точка перетину діагоналей, яка ділить їх навпіл, то $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, що і треба було довести.

9. Доведіть, що будь-яку правильну піраміду можна вписати в конус.

Доведення. 1) Основа правильної піраміди — правильний n -кутник.

2) Оскільки точка перетину діагоналей правильного n -кутника рівновіддалена від усіх його вершин, то існує коло, яке проходить через усі ці вершини n -кутника.

3) Тобто конус, основою якого є відповідний круг, а вершиною — вершина піраміди, є описаним навколо даної піраміди, що й треба було довести.

10. Доведіть, що у будь-яку правильну піраміду можна вписати конус.

Доведення. 1) Основа правильної піраміди — правильний n -кутник.

2) Оскільки точка перетину діагоналей правильного n -кутника рівновіддалена від усіх його сторін, то існує коло, яке вписане в даний n -кутник.

3) Тобто конус, основою якого є відповідний круг, а вершиною — вершина піраміди, є вписаним у піраміду, що й треба було довести.

V. Розв'язування задач на обчислення (8–10 хв)

11. У конус вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайдіть твірну конуса.

Розв'язання. 1) Розглянемо правильну трикутну піраміду $SABC$, вписану в конус із центром основи точкою O (див. рисунок). За умовою, $AB = BC = CA = 6\sqrt{3}$ (см), $\angle OCS = 60^\circ$.

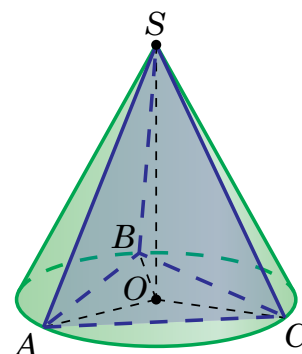
2) Нехай $OA = OB = OC = R$ — радіус основи конуса. Тоді

$$R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ (см)}.$$

3) $\triangle COS$ — прямокутний, $\angle COS = 90^\circ$, $\frac{OC}{SC} = \cos \angle OCS$.

$$\text{Тобто } SC = \frac{6}{\cos 60^\circ} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 12 см.



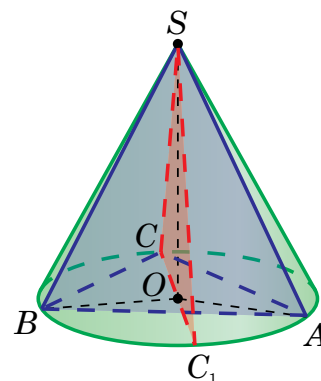
12. Навколо трикутної піраміди, сторони основи якої дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см, а висота становить 8 см, описано конус. Знайдіть площу осцевого перерізу конуса.

Розв'язання. 1) Навколо піраміди $SABC$ описано конус із центром основи точкою O (див. рисунок). За умовою, $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $SO = 8$ см.

Тоді $OA = OB = OC = R$ — радіуси основи конуса, а $SO = h$ — висота конуса.

$\triangle CSC_1$ — осцевий переріз даного конуса, бо точки C та C_1 — діаметрально протилежні в основі конуса.

2) $h = 8$ см — висота конуса дорівнює висоті піраміди.



3) Радіус основи конуса дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABC зі сторонами 10 см, 10 см та 12 см. Тоді $R = \frac{abc}{4S}$, де a, b, c — сторони трикутника, S — його площа.

4) За формулою Герона, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника.

5) Таким чином, $p = \frac{10+10+12}{2} = 16$ (см), $S = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$ (см²).

Тоді $R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6,25$ (см).

6) Отже, у $\triangle CSC_1$: $SO = h = 8$ (см), $C_1C = 2R = 12,5$ (см).

Площа осевого перерізу $S_{\pi} = \frac{C_1C \cdot SO}{2} = \frac{12,5 \cdot 8}{2} = 50$ (см²).

Відповідь. 50 см².

- 13.** Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють по 60° . Знайдіть висоту конуса, вписаного в піраміду.

Розв'язання. 1) Нехай у піраміду $QABC$, в основі якої прямокутний трикутник ABC , вписано конус з центром основи, точкою O (див. рисунок). Знайдемо QO .

2) Позначимо точку K — точку дотику вписаного у $\triangle ABC$ кола до сторони AB , а OK — радіус кола та водночас радіус основи конуса, тобто $OK = r$.

2) $OK \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри $QK \perp AB$, тому $\angle QKO$ — лінійний кут двогранного кута при основі піраміди. За умовою, $\angle QKO = 60^\circ$.

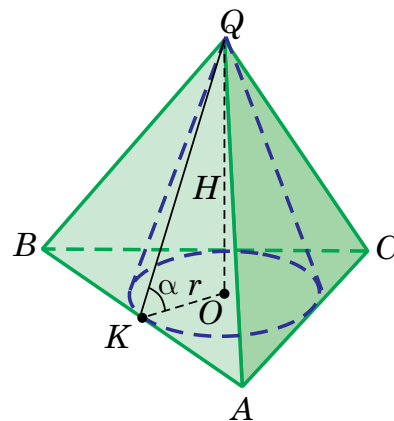
3) Радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, знайдемо за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де a і b — катети, c — гіпотенуза.

4) Із $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, тобто $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

5) Тоді $OK = \frac{6+8-10}{2} = 2$ (см), тобто $r = 2$ см.

6) Із $\triangle OQK$, $\angle O = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \angle QKO = \frac{OQ}{OK}$, тоді $OQ = 2 \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$ (см).

Відповідь. $2\sqrt{3}$ см.



VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Для театральної вистави виготовили декорацію у формі правильної чотирикутної піраміди. Усередині піраміди, у її вершині, встановили ліхтар. Світловий потік від ліхтаря поширюється у вигляді конуса, вписаного в піраміду. Основа конуса належить основі піраміди та дотикається до сторін основи піраміди. Знайдіть висоту світлового потоку, якщо апофема піраміди становить 0,6 м, а периметр її основи дорівнює 2,4 м.

Розв'язання.

1) Побудуємо правильну піраміду $SABCD$, яка відповідає декорації, та конус, вписаний у піраміду, який є зображенням світлового потоку із точки S (див. рисунок). Знайдемо висоту SO цього конуса.

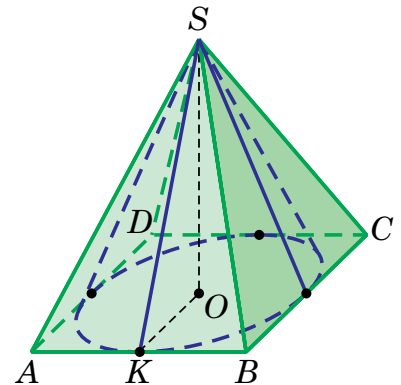
2) Оскільки $P_{\text{осн}} = 2,4$ м, то $AB = BC = CD = DA = \frac{P_{\text{осн}}}{4} = \frac{2,4}{4} = 0,6$ (м).

3) Оскільки коло з центром у точці O вписане в квадрат $ABCD$, то радіус OK цього кола дорівнює половині сторони квадрата, тобто $OK = \frac{0,6}{2} = 0,3$ (м).

4) $OK \perp AB$, за властивістю дотичної та радіуса, проведеного в точку дотику, тому $SK \perp AB$, за теоремою про три перпендикуляри, і $SK = 0,6$ (м).

5) $\triangle SOK$ — прямокутний, $\angle SOK = 90^\circ$, $SO^2 = SK^2 - OK^2$, тобто $SO = \sqrt{0,6^2 - 0,3^2} = 0,3\sqrt{3} \approx 0,52$ (м).

Відповідь. 0,52 м.



VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро становить 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота становить 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
3. Основою піраміди є трикутник зі стороною a та протилежним їй кутом α , а кут між кожним бічним ребром і площиною основи дорівнює β . Знайдіть висоту та твірну конуса, описаного навколо даної піраміди.
4. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди дорівнює 12 см. Вершина піраміди проектується в середину гіпотенузи. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

5. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами $4\sqrt{7}$ см і 12 см, а кожне бічне ребро піраміди дорівнює 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
6. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота становить 6 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.
7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема становить 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.
8. У конус із радіусом основи 6 см і висотою 8 см вписана правильна трикутна піраміда. Знайдіть довжину сторони основи піраміди.
9. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус. Сторона основи піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть радіус основи конуса.
10. У правильну трикутну піраміду вписаний конус. Сторона основи піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.

Рівень В

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.
3. Навколо конуса описано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
4. Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
5. Основа піраміди — прямокутник, менша зі сторін якого дорівнює a , а кут між діагоналями становить α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
6. Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетом b і прилеглим до нього гострим кутом α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
7. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і прилеглим до неї кутом α . Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
8. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а висота піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
9. Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює m . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.

10. Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює β , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює d . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.

Рівень С

1. Доведіть, що коли в піраміду $MABCD$ можна вписати конус, то сума площ граней AMB і CMD дорівнює сумі площ граней AMD і BMC .
2. Доведіть, що коли в піраміді $MABCD$ сума площ граней AMB і CMD дорівнює сумі площ граней AMD і BMC , то в дану піраміду можна вписати конус.
3. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є ромб зі стороною a і кутом α , а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть площу осьового перерізу даного конуса.
4. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом α при основі. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.
5. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
6. Навколо конуса описано піраміду, основою якої є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, а висота піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.
7. У зрізаний конус вписано правильну зрізану трикутну піраміду. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 18 см, а висота становить 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
8. Навколо правильної зрізаної чотирикутної піраміди описано зрізаний конус. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо сторони основ зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а її висота становить $2\sqrt{7}$ см.
9. У правильну зрізану чотирикутну піраміду вписано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 5 см і 7 см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює 45° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
10. Навколо зрізаного конуса описано правильну зрізану трикутну піраміду, сторони основ якої дорівнюють 18 см і 24 см, а бічне ребро становить 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми учнівських проєктів

1. Обчислення площ поверхонь фігур, утворених пірамідою та конусом.
2. Класифікація та розв'язування задач на комбінації піраміди та конуса. Використання комбінованих тіл у стереометричних задачах.
3. Конструювання та розв'язування власних задач на комбінації піраміди й конуса.
4. Побудова перерізів геометричних фігур, які є комбінаціями піраміди й конуса.

Список використаної літератури

- 1) Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень: підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, — К.: УОВЦ «Оріон», 2020.
- 2) Істер О. С. Геометрія: (проф. рівень): підручн. для 11 -го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019.
- 3) Ключко І. Я. Математика. Геометрія : ЗНО : завд. рівня стандарту : Комплексне видання для підготовки до ДПА у формі ЗНО. Ч.П. / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2021.
- 4) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Частина III (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2018. — 368 с.
- 5) Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень: підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019.
- 6) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл.: збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2011.
- 7) Мерзляк А. Г. Геометрія. 11 кл. профільний рівень : збірник самостійних і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019.
- 8) Моргун О. О. Збірник задач зі стереометрії. 11 клас. — Х.: Вид. група «Основа», 2010. — 128 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 8 (92)).