

Урок 7. Підсумковий урок з теми «Комбінації тіл»

План уроку

1. Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу.
2. Захист учнівських проєктів.
3. Підсумкова самостійна робота з теми «Комбінації тіл».

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані й зв'язки між ними [12 MAO 1.2.2-1];

прогнозує межі й точність результатів розв'язання проблемної ситуації та можливі форми їхнього представлення [12 MAO 1.3.1-1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 MAO 2.4.2-2];

за потреби, виправляє помилки та вносить зміни в математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 MAO 3.2.3-1];

класифікує й структурує математичні поняття та факти [12 MAO 4.1.2-1];

визначає прогалини у власних математичних знаннях і вміннях [12 MAO 4.1.3-1];

усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях [12 MAO 4.1.3-2].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Урок можна провести як урок-захист учнівських проєктів або як урок-узагальнення та систематизації вивченого.
- 3) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого матеріалу з планіметрії.
- 4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 5) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити

математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

6) Пригадайте з учнями/ученицями вивчений матеріал із теми «Комбінації тіл» для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу.

7) Оскільки запропонований урок є узагальненням вивченого, то в рамках уроку варто провести самостійну роботу, яка може мати характер навчальної або діагностичної.

8) Для проведення тестування з теми «Комбінації тіл» запропонована самостійна робота у двох варіантах. До всіх завдань наведено відповіді та критерії їхнього оцінювання.

9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи зустрічали ви у повсякденному житті предмети, що складаються з кількох геометричних тіл?

2) Чи важливо вміти описувати складні геометричні форми за допомогою простих геометричних фігур?

3) Чи впливають кольори й освітлення геометричних тіл на їхнє сприйняття?

4) Чи важливо для створення макетів будівель знати, як комбінувати геометричні тіла?

5) Чи допоможуть знання про комбінації геометричних тіл у таких професіях, як: інженер, архітектор, дизайнер, будівельник, програміст тощо?

II. Повторення (5 хв)

1. Знайдіть діагональ квадрата зі стороною 5 м.

А	Б	В	Г	Д
5 м	$5\sqrt{2}$ м	$2\sqrt{5}$ м	10 м	15 м

Відповідь. Б.

2. Якщо R — радіус кола описаного навколо правильного трикутника, r — радіус кола, вписаного у правильний трикутник, то відношення $R : r = \dots$

А	Б	В	Г	Д
3 : 1	2 : 1	3 : 2	4 : 1	4 : 3

Відповідь. Б.

3. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на частини, відношення довжин яких дорівнює 3: 4. У якому відношенні висота ділить гіпотенузу?

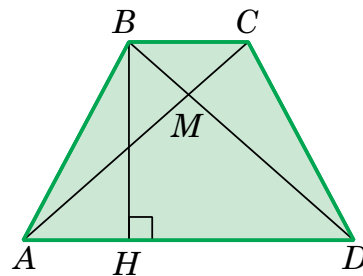
А	Б	В	Г	Д
3 : 4	$\sqrt{3} : 2$	9 : 16	2 : 3	1 : 2

Відповідь. В.

4. У трапеції $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці M так, що $S_{\triangle BMC} : S_{\triangle AMD} = 4 : 25$, висота $BH = 21$ см (див. рисунок). Знайдіть висоту трикутника AMD .

А	Б	В	Г	Д
6 см	12 см	10 см	7 см	15 см

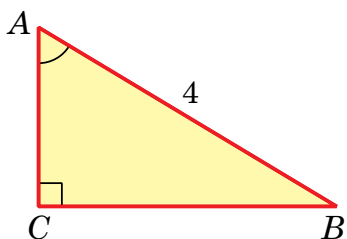
Відповідь. Д.



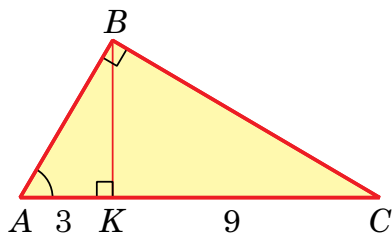
5. Установіть відповідність між кутом прямокутного трикутника (1–3) та градусною мірою (А–Д) кута.

Кут прямокутного трикутника

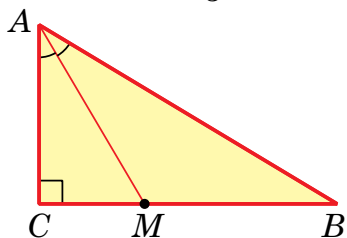
- 1 $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle A = ?$



- 2 $AK = 3$, $KC = 9$, $BK \perp AC$, $\angle A = ?$



- 3 $AM = 6$, AM — бісектриса,
 $\operatorname{tg} \angle CAM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle B = ?$



Відповідь. 1 – А; 2 – Б; 3 – Г.

Градусна міра кута

А 45°

Б 60°

В 50°

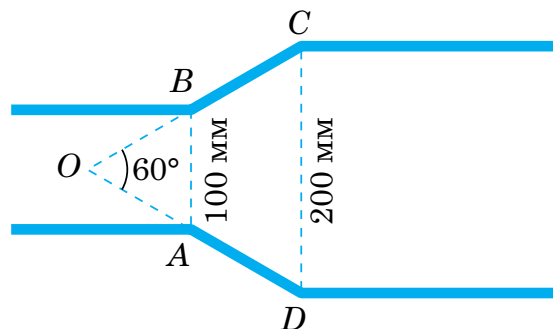
Г 30°

Д 15°

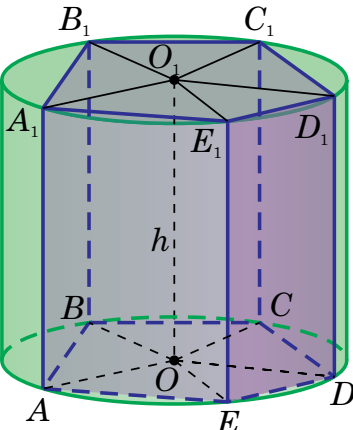
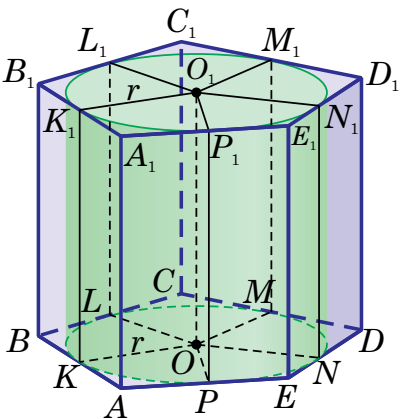
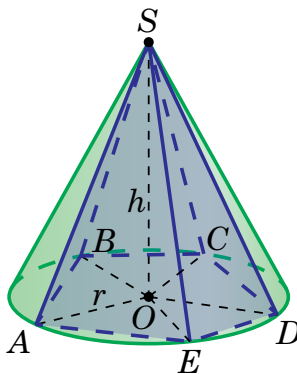
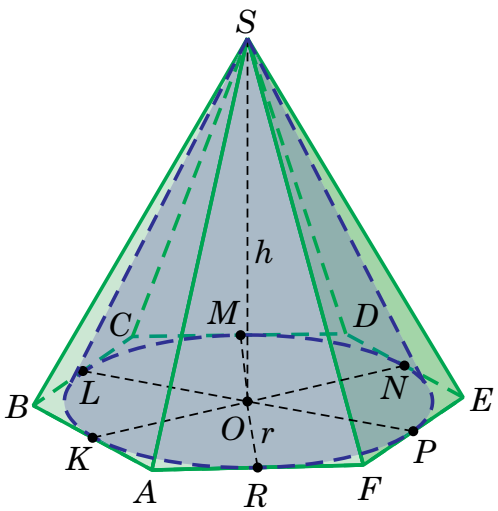
	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

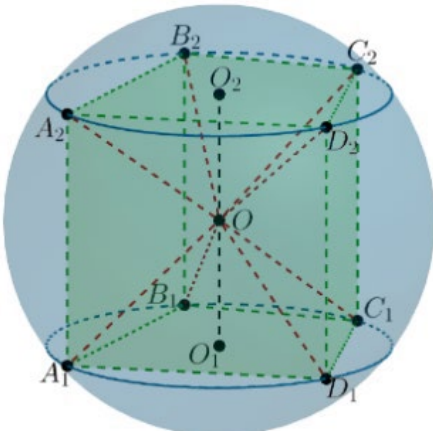
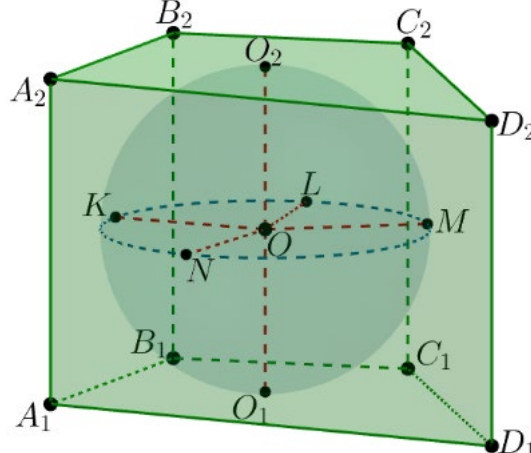
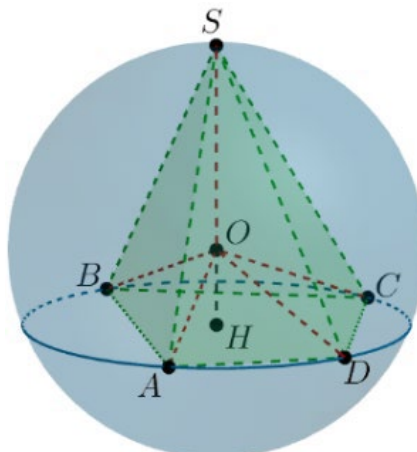
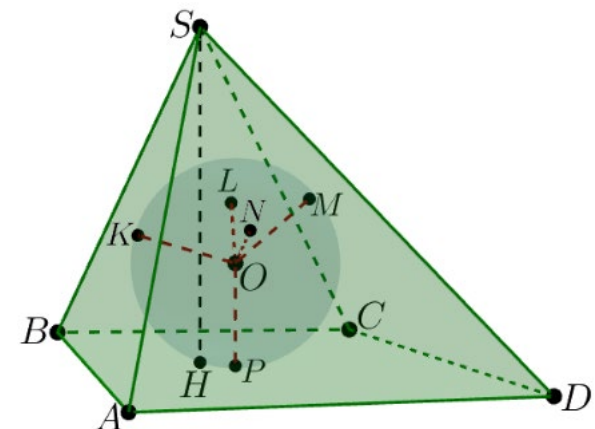
Як я вирішую певну проблему?

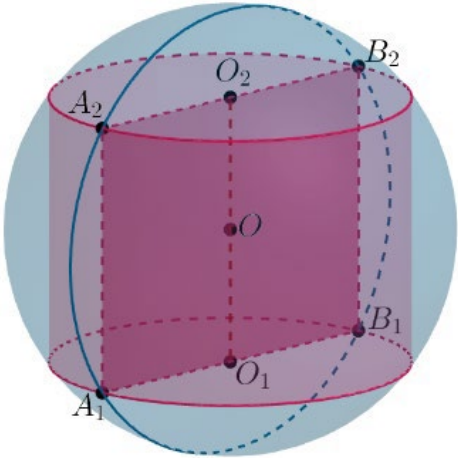
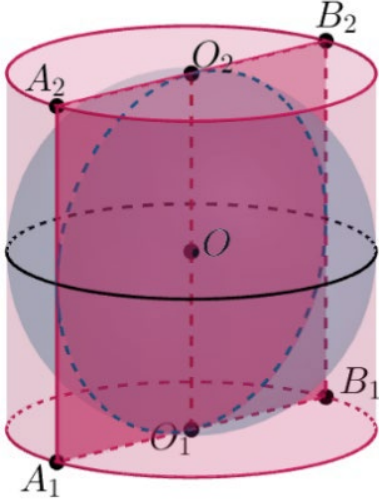
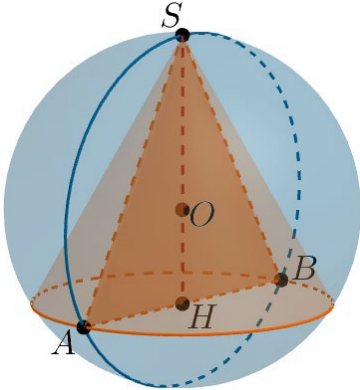
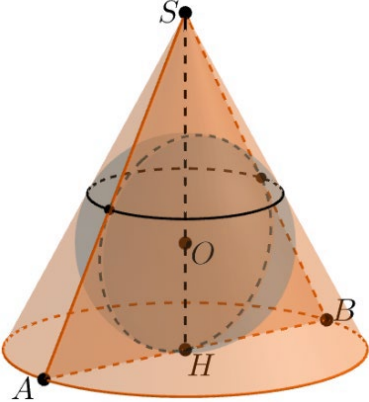
Задача. Труба з діаметром $AB = 100$ мм за допомогою конусоподібного переходу з'єднана з трубою, яка має діаметр $CD = 200$ мм (див. рисунок). Знайдіть довжину BC конусоподібного переходу, якщо в осьовому перерізі кінцевої поверхні кут між твірними дорівнює 60° .

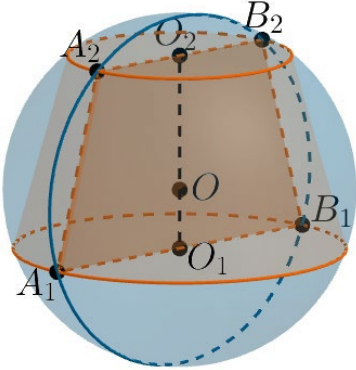
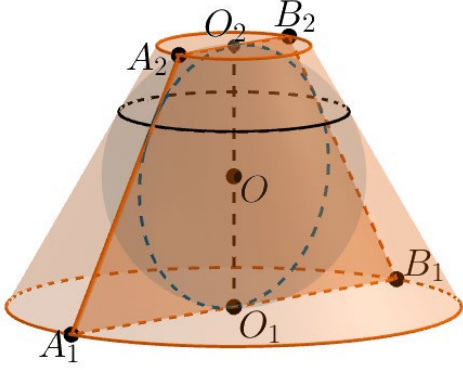


III. Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу (5–7 хв)

Призма, вписана у циліндр	Призма, описана навколо циліндра
1) $ABCDE$ та $A_1B_1C_1D_1E_1$ — рівні вписані багатокутники, радіуси описаних кіл для яких є радіусами циліндра. 2) Висота h призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.	1) $ABCDE$ та $A_1B_1C_1D_1E_1$ — рівні описані багатокутники, радіуси вписаних кіл для яких є радіусами циліндра. 2) Бічні грані призми, описаної навколо циліндра, є дотичними до циліндра. 3) Висота h призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.
	
Піраміда, вписана в конус	Піраміда, описана навколо конуса
1) $ABCDE$ — вписаний багатокутник, такий, що радіус описаного навколо нього кола є радіусом основи конуса. 2. Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, описаного навколо її основи, належить осі конуса.	1) $ABCDEF$ — описаний багатокутник, такий, що радіус вписаного кола є радіусом конуса. 2) Висота h піраміди, яка сполучає вершину з центром кола, вписаного у її основу, належить осі конуса.
	

Призма, вписана у сферу	Призма, описана навколо сфери
1) Точка O є центром сфери і рівновіддалена від вершин призми. 2) Точка O — середина висоти призми O_1O_2. 3) $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ — рівні вписані багатокутники. 	1) Точка O є центром сфери і рівновіддалена від граней призми. 2) Точка O — середина висоти призми O_1O_2. 3) $OO_1 \perp A_1B_1C_1D_1, OO_2 \perp A_2B_2C_2D_2, OK \perp A_1A_2B_2B_1, OL \perp B_1B_2C_2C_1, OM \perp C_1C_2D_2D_1, ON \perp D_1D_2A_2A_1$. 4) $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ — рівні описані багатокутники. 
Піраміда, вписана у сферу	Піраміда, описана навколо сфери
1) Точка O — центр сфери, рівновіддалена від вершин піраміди. 2) Точка O належить SH, яка є висотою піраміди. 3) $ABCD$ — вписаний багатокутник. 	1) Точка O — центр сфери, рівновіддалена від граней піраміди. 2) $OP \perp (ABC), OK \perp (ABS), OL \perp (BSC), OM \perp (CDS), ON \perp (ADS)$. 3) $ABCD$ — описаний багатокутник. 

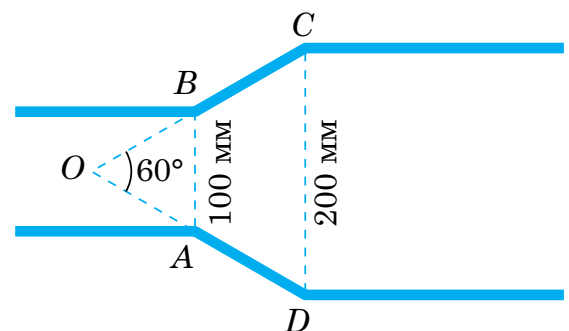
Циліндр, вписаний у сферу	Циліндр, описаний навколо сфери
1) Точка O — центр сфери є серединою O_1O_2, — осі циліндра. 2) Осьовий переріз — прямокутник $A_1A_2B_2B_1$, вписаний у коло з центром у точці O. 	1) Точка O — центр сфери є серединою O_1O_2, — осі циліндра. 2) Осьовий переріз — квадрат $A_1A_2B_2B_1$, описаний навколо кола з центром у точці O. 
Конус, вписаний у сферу	Конус, описаний навколо сфери
1) Точка O — центр сфери належить SH. 2) SH — висота конуса. 3) Осьовий переріз — рівнобедрений трикутник ASB, вписаний у коло з центром O. 	1) Точка O — центр сфери належить SH. 2) SH — висота конуса. 3) Осьовий переріз — рівнобедрений трикутник ASB, описаний навколо кола з центром O. 

Зрізаний конус, вписаний у сферу	Зрізаний конус, описаний навколо сфери
1) Точка O — центр сфери — належить O_1O_2 осі конуса. 2) Осьовий переріз — рівнобічна трапеція $A_1A_2B_2B_1$, вписана в коло з центром O .	1) Точка O — центр сфери — належить O_1O_2 осі конуса. 2) Осьовий переріз — рівнобічна трапеція $A_1A_2B_2B_1$, описана навколо кола з центром O .
	

IV. Розв'язання практичної задачі. Групова активність (6–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Труба з діаметром $AB = 100$ мм за допомогою конусоподібного переходу з'єднана з трубою, яка має діаметр $CD = 200$ мм (див. рисунок). Знайдіть довжину BC конусоподібного переходу, якщо в осьовому перерізі кут між твірними дорівнює 60° .



Розв'язання. 1) Зрозуміло, що $OA = OB$ та $OC = OD$, як твірні відповідних конусів.

2) Тобто $\triangle AOB$ та $\triangle COD$ — рівнобедрені, за означенням. Оскільки $\angle O = 60^\circ$, то ці трикутники — рівносторонні, за відповідною ознакою.

3) Таким чином, $OA = OB = AB = 100$ (мм), $OC = OD = CD = 200$ (мм).

4) Отже, $BC = OC - OB = 200 - 100 = 100$ (мм).

Відповідь. 100 мм.

**V. Підсумкова самостійна робота з теми: «Комбінації тіл»
(30–35 хв)**

Варіант 1

- 1.** В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, який описаний навколо даної призми.

А	Б	В	Г	Д
13 см	14 см	15 см	16 см	17 см

- 2.** Бічне ребро правильної трикутної піраміди та сторона основи відповідно дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в піраміду.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	6 см

[illegible]

- 3.** Якщо радіус сфери, вписаної в куб, дорівнює 2 см, то площа поверхні куба дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
8 см ²	64 см ²	80 см ²	96 см ²	100 см ²

[illegible]

4. Якщо пряма призма з бічним ребром 16 см описана навколо сфери, то радіус сфери дорівнює

А	Б	В	Г	Д
4 см	5 см	8 см	10 см	16 см

[illegible]

- 5.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. У цю призму вписано сферу. Чому дорівнює радіус сфери?

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	2,5 см	3 см	інша відповідь

- 6.** Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми.

А	Б	В	Г	Д
$\pi d^2 \sin 2\varphi$	$\pi d^2 \cos 2\varphi$	$\frac{1}{2} \pi d^2 \sin 2\varphi$	$\frac{1}{2} \pi d^2 \cos 2\varphi$	$2\pi d^2 \sin 2\varphi$

[illegible]

- 7.** Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи становить 60° . Знайдіть радіус сфери, вписаної в піраміду.

А	Б	В	Г	Д
9 см	$3\sqrt{3}$ см	12 см	$12\sqrt{3}$ см	$24\sqrt{3}$ см

[illegible]

- 8.** У сферу з радіусом r вписано правильну шестикутну призму, більша діагональ якої утворює з бічним ребром кут α . Знайдіть сторону основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$2r \sin \alpha$	$2r \cos \alpha$	$r \cos \alpha$	$r \sin \alpha$	r

[illegible]

9. Якщо площа сфери дорівнює 20 см^2 , то площа повної поверхні циліндра, описаного навколо сфери, дорівнює

А	Б	В	Г	Д
60 см ²	40 см ²	30 см ²	20 см ²	10 см ²

[illegible]

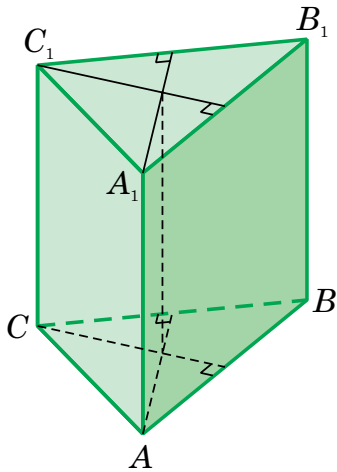
- 10.** У конусі, осьовий переріз якого є рівностороннім трикутником, твірна дорівнює $10\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус сфери, вписаної у конус.

А	Б	В	Г	Д
5 см	$5\sqrt{3}$ см	10 см	$10\sqrt{3}$ см	20 см

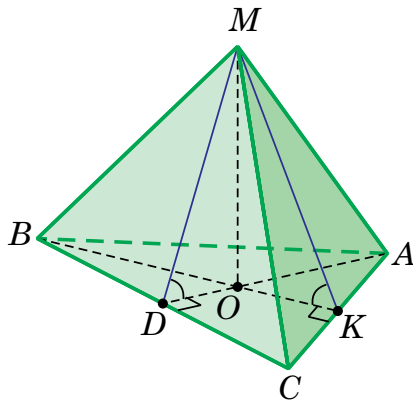
- 11.** Установіть відповідність між багатогранником (1–3) та радіусом сфери (А–Д), описаної навколо нього.

Багатогранник

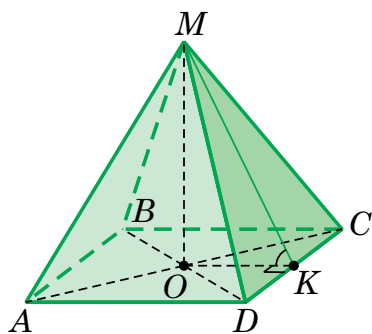
- 1 $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма, $AC = 6$, $CC_1 = 8$.



- 2 $MABC$ — правильна трикутна піраміда, $AC = 6$, $\angle MBO = 30^\circ$.



- 3 $MABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, $AB = 24$, $\angle MKO = 60^\circ$.



Радіус сфери, описаної навколо багатогранника

А 4

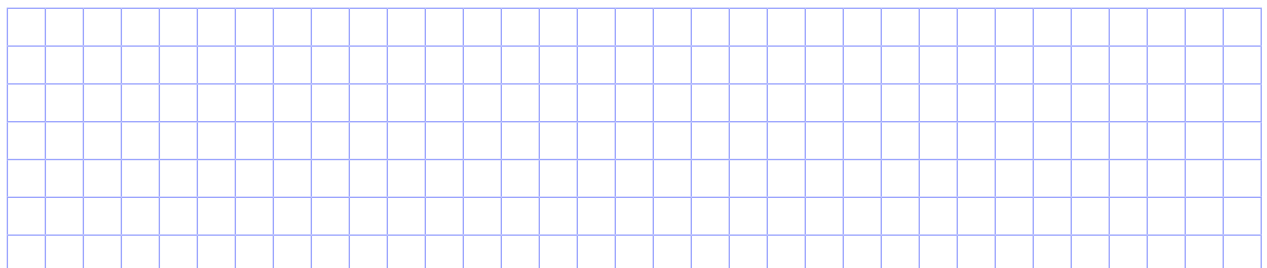
Б $2\sqrt{7}$

В $3\sqrt{7}$

Г $10\sqrt{3}$

Д $12\sqrt{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐



- 12.** Установіть відповідність між геометричним тілом (1–3) та площею його бічної поверхні (А–Д).

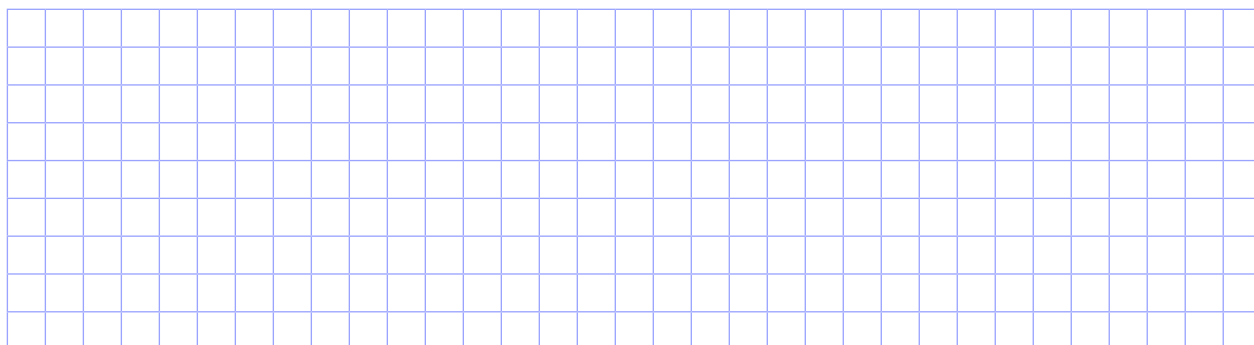
Геометричне тіло

- 1 Правильна трикутна призма зі стороною основи 4 см, вписана у циліндр з висотою 3π см.
- 2 Правильна чотирикутна піраміда, в яку вписано конус із радіусом основи 1 см та твірною 4π см.
- 3 Циліндр з радіусом основи 6 см, який вписано у сферу з діаметром $4\sqrt{10}$ см.

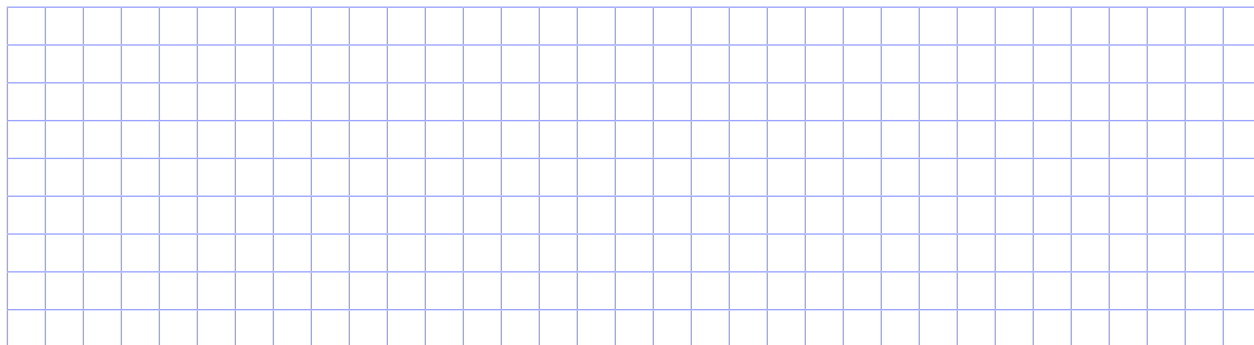
Площа бічної поверхні геометричного тіла

- А 48π см²
 Б 36π см²
 В 24π см²
 Г 16π см²
 Д 12π см²

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

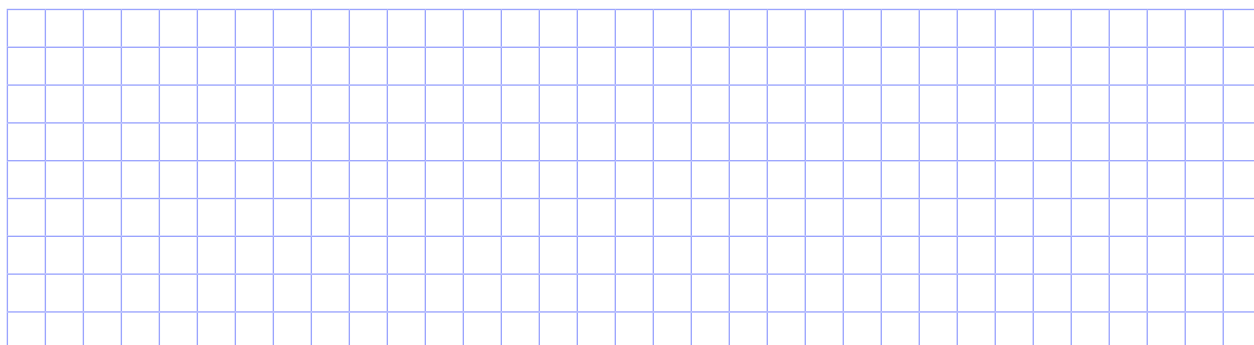


- 13.** У правильній піраміді висота дорівнює $6\sqrt{3}$ дм, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.



Відповідь.

- 14.** Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного паралелепіпеда.



Відповідь.

Варіант 2

- 1.** В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, який описаний навколо даної призми.

А	Б	В	Г	Д
13 см	14 см	15 см	16 см	17 см

[illegible]

- 2.** Бічне ребро правильної трикутної піраміди та сторона основи відповідно дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	6 см

[illegible]

- 3.** Якщо діаметр сфери, вписаної в куб, дорівнює 3 см, то площа поверхні куба дорівнює

А	Б	В	Г	Д
9 см ²	54 см ²	80 см ²	96 см ²	100 см ²

[illegible]

4. Якщо пряма призма з бічним ребром 20 см описана навколо сфери, то радіус сфери дорівнює

А	Б	В	Г	Д
4 см	5 см	8 см	10 см	16 см

[illegible]

- 5.** Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см. У цю призму вписано сферу. Чому дорівнює радіус сфери?

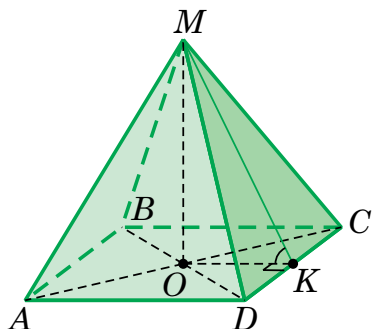
А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	2,5 см	3 см	інша відповідь

[illegible]

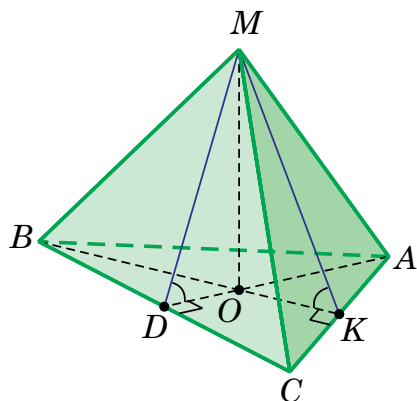
- 11.** Установіть відповідність між багатогранником (1–3) та радіусом сфери (А–Д), вписаної у нього.

Багатогранник

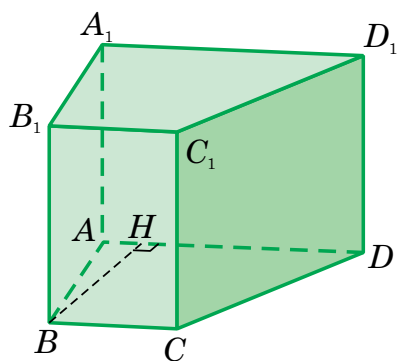
- 1 $MABCD$ — чотирикутна піраміда,
 $ABCD$ — прямокутник, $AC = 12$,
 $\angle MKO = 60^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$.



- 2 $MABC$ — правильна трикутна піраміда, $AC = 6$, $\angle MDO = 60^\circ$.



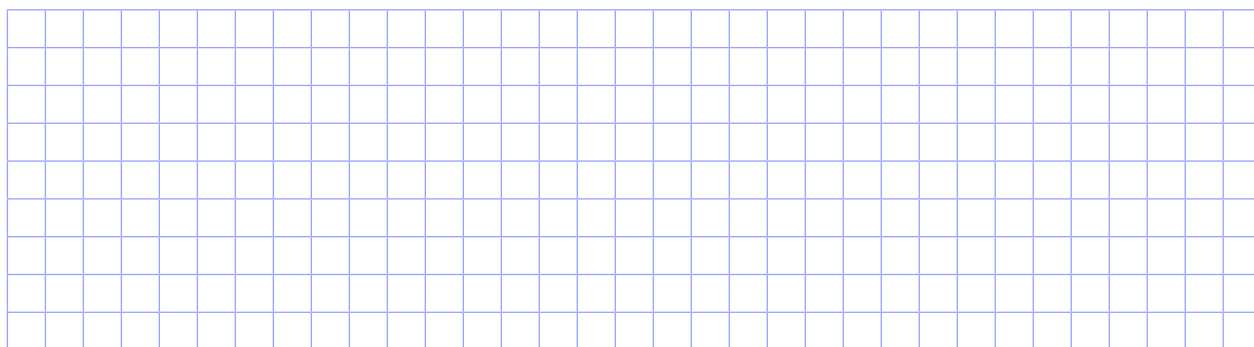
- 3 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — пряма призма, основа якої рівнобічна трапеція, $BC = 4$, $AD = 16$.



Радіус сфери, вписаної
в багатогранник

- А 1
Б 3
В 4
Г $2\sqrt{3}$
Д $3\sqrt{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐



- 12.** Установіть відповідність між геометричним тілом (1–3) та площею його бічної поверхні (А – Д).

Геометричне тіло

1 Правильна чотирикутна призма, вписана у циліндр із радіусом $1,5\sqrt{2}$ см і висотою 4π см.

2 Правильна трикутна піраміда, в яку вписано конус із радіусом $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см та твірною 4π см.

3 Циліндр, висотою 3 см, який вписано у сферу з діаметром $\sqrt{73}$ см.

Площа бічної
поверхні

A 6π cm²

 $12\pi \text{ см}^2$

B 18π cm²

 $\Gamma \ 24\pi \text{ cm}^2$ Д 48π см²

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

[illegible]

- 13.** У правильній піраміді бічне ребро дорівнює $6\sqrt{2}$ дм і утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.

[illegible]

Відповідь.

- 14.** Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см, 6 см і 7 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного паралелепіпеда.

[illegible]

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

Варіант 1

1. А.
2. В.
3. Г.
4. В.
5. А.
6. В.
7. Б.
8. Г.
9. В.
10. А.
11. 1 – Б, 2 – А, 3 – Г.
12. 1 – Б, 2 – Г, 3 – А.
13. 108π дм².
14. 7 см.

Варіант 2

1. В.
2. Б.
3. Б.
4. Г.
5. Б.
6. В.
7. Б.
8. Д.
9. Б.
10. В.
11. 1 – Б, 2 – А, 3 – В.
12. 1 – Д, 2 – В, 3 – Г.
13. $36\pi(1 + \sqrt{2})$ дм².
14. 5,5 см.

Таблиця оцінювання

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Бали	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

№ завдання	11	12	13	14	Сума
Бали	3	3	2	2	20

Критерії оцінювання

1) Коефіцієнт оцінювання: $\frac{12}{20} = 0,6$.

2) Коефіцієнт оцінювання 0,6 множимо на кількість набраних балів і отримаємо оцінку. Наприклад, учень/учениця набрав/набрала 18 тестових балів за результатами тестування. Тоді, оцінка: $18 \cdot 0,6 = 11$ (балів).

VI. Рефлексія (1–2 хв)

1. На уроці я дізнався/дізналася
-
-
2. Мені найбільше запам'яталося
-
-
-

3. Для мене було найцікавішим
.
.
.
4. Для мене було найскладнішим
.
.
.
5. Я припустився/припустилася помилки
.
.
.
6. Я хочу повторити, аби краще зрозуміти
.
.
.
7. Поради собі до наступного уроку
.
.
.

Список використаної літератури

- 1) Бурда М. І. Геометрія. Профільний рівень : підручн. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, — К. : УОВЦ «Оріон», 2020.
- 2) Ключко І. Я. Математика. Геометрія ЗНО. Завдання рівня стандарту: Комплексне видання для підготовки до ДПА у форматі ЗНО. Ч.ІІ. / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2024.
- 3) Ключко І. Я. Математика: Тестові завдання. Ч. IV. Стереометрія (зовнішнє незалежне оцінювання) / І. Я. Ключко. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2019.
- 4) Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень : підручн. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х.: Гімназія, 2019.
- 5) Мерзляк А. Г. Математика. 11 кл.: рівень стандарту: збірник задач, тестів і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2019. — 160 с.: іл.
- 6) Роганін О. М. / Тест-контроль. Алгебра і початки аналізу + Геометрія 11 клас: Зошит для самостійних та контрольних робіт / О. М. Роганін — Харків: ФОП Співак Т. К., 2009.