

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 1. Первісна функції

План уроку

1. Означення первісної функції.
2. Основна властивість первісної.
3. Невизначений інтеграл.
4. Графічна ілюстрація основної властивості первісної.
5. Таблиця первісних функцій.
6. Знаходження первісних функцій, графік яких проходить через задану точку.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

відображає результати розв'язання проблемної ситуації в різноманітних формах, зокрема із використанням інформаційних технологій [12 МАО 2.4.1-2];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання лише сформулюйте, а відповідайте на них поступово, з викладенням матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям завдання на повторення у вигляді математичної естафети.
- 3) Сформулюйте життєві задачі (без розв'язання). Розв'язання запропонуйте у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд з урахуванням часових можливостей уроку.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Заплануйте проведення останніх частин уроку, а саме: розв'язування практичних задач та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Якщо відома швидкість руху автомобіля у кожен момент часу, то чи можливо знайти пройдений автомобілем шлях?
- 2) Чому при розрахунках кількості використаного пального важливо знати не лише витрати в даний момент часу, а й витрати пального за певний проміжок часу?
- 3) Чи можна знайти загальну кількість хворих за певний період часу, якщо відома лише формула, що задає швидкість поширення інфекції?
- 4) В криптоаналізі для зламу шифрів використовують швидкість перебору ключів крипто-системи, яка залежить від часу. Яким чином знаходиться кількість перевірених ключів за t секунд?
- 5) В яких реальних ситуаціях важливо мати не миттєві значення певної величини, а накопичені за певний проміжок часу?

II. (Усно). Повторення. Математична естафета (3–4 хв)

1. Які дії між числами та між функціями виконують у математиці?

Відповідь. Додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, потенціювання, диференціювання.

2. Які дії називаються оберненими?

Відповідь. Дії називають оберненими, які скасовують виконання одна одної.

3. Яку дію називають оберненою до дії «додавання»?

Відповідь. Віднімання.

4. Яку дію називають оберненою до дії «множення»?

Відповідь. Ділення.

5. Оберненою дією до дії «піднесення числа до степеня» є дія ...

Відповідь. Добування кореня.

6. Оберненою дією до потенціювання є дія ...

Відповідь. Логарифмування.

7. Що називають диференціюванням функції?

Відповідь. Обчислення похідної.

Проблемне запитання. Чи має дія диференціювання функцій обернену дію? Диференціювання функцій має обернену дію, яку називають інтегруванням. За допомогою інтегрування можна визначити функцію, похідна якої дорівнює заданій.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Рівень забруднення річки зростає із швидкістю $P'(t)$. Опишіть екологічний стан річки після вимірювання рівня забруднення на початку моніторингу.

III. Означення первісної функції

Означення. Функцію $F(x)$ називають **первісною функцією** $f(x)$ на заданому проміжку (або на всій області визначення), якщо для всіх значень аргументу x із цього проміжку (з області визначення) виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = \frac{x^6}{2}$ є первісною для функції $f(x) = 3x^5$, оскільки

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{2} \right)' = 3x^5.$$

Ілюстративні приклади (2–3 хв)

8. Доведіть, що функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$ є первісною функції $f(x) = x^3$, якщо $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Знайдемо похідну функції $F(x)$.

Оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} \right)' = x^3$, то функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$ є первісною функції $f(x) = x^3$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

9. Як знайти пройдений автомобілем шлях, якщо відома швидкість його руху в кожен момент часу?

Розв'язання. Якщо відома швидкість $v(t)$ автомобіля в кожен момент часу t , то шлях s є первісною $s(t)$ від швидкості $v(t)$.

Відповідь. Знайти первісну.

IV. Основна властивість первісної (2–3 хв)

Теорема. Якщо функція $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то будь-яка функція $F(x) + C$, де C — довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

Якщо до функції $F(x) = \frac{x^4}{4}$ додати будь-яке число C , то утворена функція

$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$ також буде первісною функції $f(x) = x^3$, бо похідна від числа дорівнює 0.

Висновок. Отже, якщо деяка функція має первісну, то таких первісних безліч.

Усі первісні функції $y = f(x)$ можна записати за допомогою формули, яку називають загальним виглядом первісних для функції $y = f(x)$.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то будь-яку іншу первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ можна подати у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільне число (константа).

Вираз $F(x) + C$ називають загальним виглядом первісних для функцій $f(x)$ або множиною всіх первісних для функцій $f(x)$.

Оскільки $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, то $F(x) + C$ — первісна функції $f(x)$.

Ілюстративні приклади

10. Вантажівка має бак із об'ємом 450 л, який наповнений двадцятьма літрами палива. Складіть первісну функції, що визначає кількість палива через t хвилин, якщо швидкість наповнення бака $v = 2$ л/хв.

Розв'язання. Оскільки за одну хвилину в бак потрапляє 2 літри палива, то за t хвилин бак наповниться $2t$ літрами палива. У баку було 20 літрів, тому первісна функції: $V(t) = 2t + 20$.

Відповідь. $V(t) = 2t + 20$.

У наведеному прикладі функція кількості палива має вигляд $V(t) = 2t + C$, де C залежить від того, скільки літрів палива було спочатку, тобто, за умовою, 20 л, тому: $V'(t) = (2t + 20)' = (2t)' + 20' = 2 + 0 = 2$, де 2 л/хв — швидкість наповнення баку паливом.

Зрозуміло, що C — стала величина, яка визначає початкову кількість палива, може змінюватися і набувати будь-яких значень від 0 л до 450 л.

V. Невизначений інтеграл (3–4 хв)

Означення. Загальний вигляд первісної будь-якої функції $y = f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* цієї функції і позначають $\int f(x)dx$.

Читають: «інтеграл функції f від x по де x ».

Таким чином, множина всіх первісних функції $f(x)$ дорівнює невизначеному інтегралу, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, де знак $\int$ називають *інтегралом*.

При цьому, $f(x)$ — *підінтегральна функція*, dx — диференціал від x .

Тоді $f(x)dx$ — підінтегральний вираз, аргумент x — змінна інтегрування, C — стала інтегрування, $F(x)$ — первісна функції $f(x)$.

Дію знаходження множини первісних функції $\int f(x)dx$ називають *інтегруванням функції $f(x)$* .

Щоб перевірити правильність інтегрування, потрібно скористатися основною властивістю первісних: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, тобто знайти похідну кінцевого результату інтегрування і переконатися, що отримали підінтегральну функцію.

Справді, за означенням: $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Ілюстративний приклад

11. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = -x^7$ при $x \in R$.

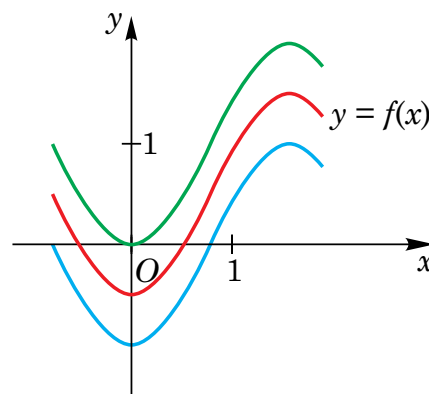
Розв'язання. Потрібно знайти таку функцію, похідна якої дорівнює $-x^7$.

Тобто $F(x) = -\frac{x^8}{8} + C$, оскільки $F'(x) = \left(-\frac{x^8}{8} + C\right)' = -x^7$.

Відповідь. $F(x) = -\frac{x^8}{8} + C$.

VI. Графічна ілюстрація основної властивості первісної

Геометричний зміст основної властивості первісної полягає в тому, що графіки будь-яких двох первісних функції $f(x)$ утворюються один з одного паралельним перенесенням на C одиниць (див. рисунок).



VII. Таблиця первісних функцій або таблиця невизначених інтегралів

$\int dx = x + C$	$\int \sin dx = -\cos x + C$	$\int \cos dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 12.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Перепишемо початкову функцію так: $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Тоді $\int x^{\frac{2}{3}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$.

Відповідь. $\frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$.

- 13.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = \frac{5}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Запишемо невизначений інтеграл: $\int \frac{5dx}{\cos^2 x} = 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 5 \operatorname{tg} x + C$.

Відповідь. $5 \operatorname{tg} x + C$.

VIII. Знаходження первісних функцій, графік яких проходить через задану точку (2 хв)

Важливою задачею є задача знаходження первісної, графік якої проходить через задану точку, або, по-іншому, — задача обчислення константи інтегрування.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $A(x_0; y_0)$, то константа інтегрування задовольняє рівняння $F(x_0) + C = y_0$.

Алгоритм знаходження первісної, графік якої проходить через задану точку

1. Записуємо невизначений інтеграл.
2. Знаходимо загальний вигляд первісної.
3. Підставляємо координати заданої точки замість аргументу функції та значення підінтегральної функції.
4. Розв'язуємо отримане рівняння, щоб визначити сталу інтегрування C .
5. Записуємо функцію, з урахуванням знайденої константи інтегрування.

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

- 14.** Знайдіть первісну від $f(x) = x$, графік якої проходить через точку (4; 5).

Розв'язання.

1) Записуємо невизначений інтеграл $\int f(x)dx = \int xdx$. Із таблиці невизначених інтегралів для $\int xdx$ шукаємо множину всіх первісних заданої функції.

2) Оскільки підінтегральна функція є степеневою, для якої $n = 1$, то маємо $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

3) Підставляємо координати заданої точки (4; 5) у вираз для первісної.

Оскільки $x = 4$, а $f(x) = 5$, то отримуємо рівняння $5 = \frac{4^2}{2} + C$, де невідомим є стала інтегрування C .

4) Розв'язуємо отримане рівняння: $C = -3$.

5) Отже, первісна функції $f(x) = x$, графік якої проходить через задану точку (4; 5), має вигляд $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3$.

Відповідь. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3$.

- 15.** Знайдіть первісну від $f(x) = 2x$, графік якої проходить через точку (1; 5).

Розв'язання. Записуємо загальний вигляд первісних: $\int 2xdx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$.

Підставляємо координати точки (1; 5): $5 = 1^2 + C$, звідси $C = 4$.

Отже, первісна: $F(x) = x^2 + 4$.

Відповідь. $F(x) = x^2 + 4$.

Застосування первісної функції найрізноманітніше. Сфери застосування первісної: фізика, механіка, економіка, медицина, біотехнології, транспортна логістика тощо.

Наприклад, щоб знайти роботу A , яку сила виконує при переміщенні тіла, потрібно знайти невизначений інтеграл, тобто $A = \int F(x)dx$.

IX. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (4–5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Рівень забруднення річки зростає із швидкістю $P'(t)$. Опишіть екологічний стан річки після вимірювання рівня забруднення на початку моніторингу.

Розв'язання. Рівень забруднення річки зростає із швидкістю $P'(t)$.

Знайдемо функцію $P(t)$: $P(t) = \int P'(t)dt = F(t) + C$.

Стала C відповідає початковому рівню забруднення, наприклад, виміряному на початку моніторингу.

Відповідь. $F(t) + C$.

Х. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть загальний вигляд первісних:
1) $f(x) = 3$; 2) $f(x) = 5x$; 3) $f(x) = 2x^3$; 4) $f(x) = 7x^{-2}$.
2. Знайдіть первісну функції $y = f(x)$, графік якої проходить через точку $A(x; y)$:
1) $f(x) = 5$, $A(1; 2)$; 2) $f(x) = 2x$, $A(1; 3)$;
3) $f(x) = 3x^2$, $A(0; 2)$; 4) $f(x) = \cos x$, $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Обчисліть функцію $f(x)$, якщо відомий невизначений інтеграл:
1) $\int f(x)dx = 9x + 8$; 2) $\int f(x)dx = -8x^2 - 6$;
3) $\int f(x)dx = 4 \sin x + 2$; 4) $\int f(x)dx = -12 \cos x + 18$;
5) $\int f(x)dx = 2e^x - \ln 3$; 6) $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln x - 5$;
7) $\int f(x)dx = 6\sqrt{x} + 2$; 8) $\int f(x)dx = 2 \operatorname{tg} x - 4x$;
9) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 12x + 4$; 10) $\int f(x)dx = \operatorname{ctg} x + \sqrt{2}$.
4. Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відомий загальний вигляд первісної:
1) $F(x) = 4x + C$; 2) $F(x) = -2x^2 + C$;
3) $F(x) = 5x^3 + C$; 4) $F(x) = 4 \sin x + C$;
5) $F(x) = -7 \cos x + C$; 6) $F(x) = 2e^x + C$;
7) $F(x) = 6\sqrt{x} + C$; 8) $F(x) = 8 \cdot \frac{1}{x} + C$;
9) $F(x) = \frac{1}{2} \ln |x| + C$; 10) $F(x) = -\frac{3}{2}x^{-2} + C$.
5. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, що набуває заданого значення у визначеній точці:
1) $f(x) = 4$, $F(1) = 2$; 2) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
3) $f(x) = x$, $F(0) = 2$; 4) $f(x) = \cos x$, $F(-\pi) = -1$.
6. Установіть, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:
1) $F(x) = 2x^3 - 4$, $f(x) = 6x^2 - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = 5x - x^2$, $f(x) = 5 - 2x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
3) $F(x) = 2 \cos x$, $f(x) = -2 \sin x$, $x \in (-\pi; \pi)$;
4) $F(x) = \sqrt{x} + 2$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$.
7. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:
1) $F(x) = x^3$, $f(x) = 3x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $F(x) = -x^2$, $f(x) = -2x$, $x \in (0; +\infty)$;
3) $F(x) = -\cos x$, $f(x) = \sin x$, $x \in R$; 4) $F(x) = e^x - 1$, $f(x) = e^x$, $x \in R$.

- 8.** Пацієнту ввели 80 мг лікарського препарату, швидкість зміни концентрації якого обчислюється за формулою $c'(t) = -4e^{-0.5t}$. Знайдіть $c(t)$ та обчисліть концентрацію ліків у крові пацієнта через три години, якщо початкова концентрація становила $c(0) = 80$ мг.

Рівень В

- 1.** Знайдіть загальний вигляд первісних:

$$1) f(x) = e^2; \quad 2) f(x) = \cos x; \quad 3) f(x) = e^{2x}; \quad 4) f(x) = \frac{1}{x}.$$

- 2.** Знайдіть первісну функції $y = f(x)$, графік якої проходить через точку $A(x; y)$:

$$1) f(x) = e^2, A(0; 2); \quad 2) f(x) = 2\cos x, A\left(0; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$3) f(x) = e^{2x}, A(0; 1); \quad 4) f(x) = \frac{1}{x}, A(1; 2).$$

- 3.** Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відомий невизначений інтеграл:

$$1) \int f(x)dx = -\frac{3}{2}x^2 + 8x - 2; \quad 2) \int f(x)dx = -\cos 3 + \frac{3}{4}e^x;$$

$$3) \int f(x)dx = -12\cos x + \sqrt{x} - \operatorname{tg} 2; \quad 4) \int f(x)dx = \frac{x^4}{4} + x - \sqrt{2};$$

$$5) \int f(x)dx = x \sin x - 1; \quad 6) \int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln x, \text{ для } x > 0;$$

$$7) \int f(x)dx = (2x - 3)^2 + \ln 5; \quad 8) \int f(x)dx = 2(x^3 + 1)^4 + 1;$$

$$9) \int f(x)dx = \frac{2x}{1 + 3x}; \quad 10) \int f(x)dx = x \cos x.$$

- 4.** Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відомий загальний вигляд первісної:

$$1) F(x) = 5\sin(3x) + C; \quad 2) F(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^3 + C;$$

$$3) F(x) = -4\cos(2x) + C; \quad 4) F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C;$$

$$5) F(x) = 3\ln(2x) + C; \quad 6) F(x) = 4x^{\frac{1}{3}} + C;$$

$$7) F(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-3} + C; \quad 8) F(x) = 2(x^3 + 1)^4 + C;$$

$$9) F(x) = 6\operatorname{tg} x + C; \quad 10) F(x) = x \sin x + C.$$

- 5.** Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, яка набуває заданого значення у визначеній точці:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2}, F(1) = -2; \quad 2) f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$3) f(x) = 4x^3, F(-1) = 2; \quad 4) f(x) = 3\cos x, F(-\pi) = -1.$$

- 6.** Установіть, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:
- 1) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - 2) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - 3) $F(x) = \cos x - 7$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - 4) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x) = \frac{1}{2x^3}$, $x \in (0; +\infty)$.
- 7.** Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:
- 1) $F(x) = 3x^5 + 2$, $f(x) = 15x^4$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - 2) $F(x) = -x^{-3} - 1$, $f(x) = 3x^{-4}$, $x \in (0; +\infty)$;
 - 3) $F(x) = 2\sin x - \cos 5$, $f(x) = 2\cos x$, $x \in R$;
 - 4) $F(x) = \pi - \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in (-\pi; \pi)$.
- 8.** Рівень забруднення річки зростає зі швидкістю $P'(t) = 2t$ (од/день). Опишіть екологічний стан річки, після вимірювання рівня забруднення на початку моніторингу, якщо $P(0) = 100$ та встановіть рівень забруднення через тиждень.
- 9.** Безпілотник рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2t$ (у м/с²). Знайдіть закон руху безпілотника, якщо в момент $t = 1$ с його швидкість дорівнює 10 м/с, а координата становить 15 м.
- 10.** Швидкість дрона, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t) = t^2 - 2t + 1$ (у м/с). Запишіть формулу залежності координати руху дрона від часу, якщо відомо, що в момент $t = 0$ с дрон знаходився на станції пуску. Точку пуску вважайте за початок координат.

Рівень С

- 1.** Знайдіть загальний вигляд первісних:
- 1) $f(x) = 2e^x$;
 - 2) $f(x) = 3\sin x$;
 - 3) $f(x) = 25^x$;
 - 4) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- 2.** Знайдіть первісну функції $y = f(x)$, графік якої проходить через точку $A(x; y)$:
- 1) $f(x) = 2e^x$, $A(0; 2)$;
 - 2) $f(x) = 3\sin x$, $A(0; \pi)$;
 - 3) $f(x) = 25^x$, $A(0; 1)$;
 - 4) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $A\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- 3.** Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відомий невизначений інтеграл:
- 1) $\int f(x)dx = 5\sin(3x) + 2$;
 - 2) $\int f(x)dx = \frac{1}{10}x^{10} - 3x^5 - 7e^3$;
 - 3) $\int f(x)dx = -4\cos(x-1) + \sqrt{2}$;
 - 4) $\int f(x)dx = 3xe^x + 18$;
 - 5) $\int f(x)dx = 2e^{\frac{1}{x}} - 3\ln x$, для $x > 0$;
 - 6) $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\cos^2 x - 5$;
 - 7) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(\ln x) + \cos 5$, для $x > e$;
 - 8) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + \ln 2$;
 - 9) $\int f(x)dx = -3\ln(x^2 + 1) + \sqrt{2x-1}$;
 - 10) $\int f(x)dx = 4\sqrt{1+x^4} + \sin 2$.

4. Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відомий загальний вигляд первісної:

- 1) $F(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + C$;
- 2) $F(x) = \frac{1}{8} x^8 - \frac{1}{5} x^5 + C$;
- 3) $F(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2(2x) + C$;
- 4) $F(x) = \frac{1}{3} x^3 e^{3x} + C$;
- 5) $F(x) = \operatorname{tg}(2x) - 4 \ln(x+1) + C$ для $x > 1$;
- 6) $F(x) = -4 \sin(x-1) + C$;
- 7) $F(x) = \ln^2(\sin x) + C$, для $\sin x > 0$;
- 8) $F(x) = \frac{1}{5} (x^5 + 1)^{\frac{4}{5}} + C$;
- 9) $F(x) = -4 \ln(x^2 + 1) + \sqrt{2x-1} + C$;
- 10) $F(x) = \frac{2x}{1+2x} + C$.

5. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, що набуває заданого значення у визначеній точці:

- 1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$;
- 2) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
- 3) $f(x) = 4x^3 - 1$, $F(-1) = 2$;
- 4) $f(x) = 2 \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

6. Встановіть, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:

- 1) $F(x) = 4x\sqrt{x}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$;
- 2) $F(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;
- 3) $F(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-2; 2)$;
- 4) $F(x) = 2x + \cos \frac{x}{2}$, $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$, $x \in R$.

7. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на визначеному проміжку:

- 1) $F(x) = \sin^2 x - \ln 2$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in R$;
- 2) $F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{5}$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in R$;
- 3) $F(x) = \frac{1}{7} x^7 - x + 1$, $f(x) = x^6 - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
- 4) $F(x) = \pi + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

8. У ферментативній реакції швидкість росту бактерій обчислюється за формулою $N'(t) = 50e^{-0.1t}$. Знайдіть $N(t)$ з урахуванням початкового значення $N(0) = 100$ та обчисліть реакцію через 10 годин. Результат округліть до десятих.

9. Повінь в кінці березня спричинила рівень забруднення річки, що зростала із швидкістю $P'(t) = 40e^{-0.05t}$ (од/день). Опишіть екологічний стан річки, після вимірювання рівня забруднення на початку моніторингу, якщо $P(0) = 200$ та встановіть рівень забруднення через місяць. Результат округліть до сотих.

XI. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|-----------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке первісна функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію означення невизначеного інтеграла. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як записати загальний вигляд первісної функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію знаходити загальний вигляд первісної функції. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію шукати первісну функції за допомогою таблиці невизначених інтегралів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію послідовність виконання дій в алгоритмі обчислення первісних функцій, графік яких проходить через задану точку. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я вмію шукати первісну функції, графік якої проходить через задану точку. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми учнівських проєктів

1. Первісна у медицині. Моделювання виведення ліків з організму. Дослідження моделей концентрації ліків, приклади з реальних фармакокінетичних графіків.
2. Використання первісної для оцінки рівня забруднення водойм. Прогнозування стану довкілля.
3. Первісна у біотехнологіях. Розмноження бактерій та ферментативні реакції. Моделювання експоненційних процесів і знаходження первісних для біологічних систем.
4. Від Архімеда до Ньютона. Історія виникнення інтегралів і первісних.
5. Первісна у транспорті. Оптимізація витрат пального. Приклади з логістики, як інтегрування допомагає знайти витрати пального при змінній швидкості руху.
6. Первісна у фізиці. Визначення шляху, пройденого рухомим об'єктом за відомою швидкістю.
7. Математика та криптологія. Роль інтегралів у теорії шифрування. Дослідження застосування інтегралів у криптоаналізі та цифровій обробці сигналів.
8. Первісна в економіці. Прибуток, витрати та оптимізація виробництва. Побудова моделей витрат/прибутку та їхній аналіз за допомогою первісних.