

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 2. Правила знаходження первісних

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтеся про метод безпосереднього інтегрування з використанням табличних інтегралів;
- 2) засвоїте правила знаходження первісних;
- 3) навчитеся шукати первісні функцій із застосуванням правил інтегрування;
- 4) навчитеся розв'язувати практичні задачі, де потрібно знайти первісну, використовуючи правила інтегрування.

II. Повторення

1. Задано функцію $y = 3x$. Які з наведених тверджень є правильними? (Пробне ЗНО, 2017 р.).

I. Будь-яка первісна цієї функції є парною.

II. Графік будь-якої первісної цієї функції проходить через точку $O(0; 0)$.

III. Графік будь-якої первісної цієї функції не перетинає вісь x .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише III	лише I та II	лише I та III

2. Із заглибленням у надра Землі температура порід підвищується в середньому на 3°C кожні 100 м. Прилад на першому рівні ствола шахти показує температуру породи $+12^\circ \text{C}$. За якою формулою можна визначити температуру ($y^\circ \text{C}$) породи на глибині, що на h метрів нижче від першого рівня? (ЗНО, 2021 р., додаткова сесія).

А	Б	В	Г	Д
$t(h) = 12 + \frac{3h}{100}$	$t(h) = 12 - \frac{3h}{100}$	$t(h) = 3 + \frac{100h}{12}$	$t(h) = 3 + \frac{100}{12h}$	$t(h) = 12 + \frac{100h}{3}$

3. Для місцевості, що лежить на рівні моря, нормальний атмосферний тиск становить 760 мм рт. ст. Із підняттям на кожні 100 метрів угору атмосферний тиск знижується на 10 мм рт. ст. Укажіть з-поміж наведених формулу, за якою визначають атмосферний тиск p (у мм рт. ст.) на висоті h метрів над рівнем моря. (ЗНО, 2021 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$p(h) = \frac{760 \cdot 100}{10h}$	$p(h) = 760 - \frac{100h}{10}$	$p(h) = 760 + \frac{10h}{100}$	$p(h) = 760 + \frac{100h}{10}$	$p(h) = 760 - \frac{10h}{100}$

4. Яка з наведених функцій є первісною для функції $f(x) = x^{-4}$? (ЗНО, 2021 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -\frac{1}{5x^5}$	$F(x) = -\frac{3}{x^5}$	$F(x) = -\frac{4}{x^5}$	$F(x) = -\frac{5}{x^5}$	$F(x) = -\frac{1}{3x^3}$

5. Функція $F(x) = 5x^4 - 1$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть формулу $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$. (ЗНО, 2020 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = x^5 - x$	$G(x) = 5x^4 - x$	$G(x) = 20x^3$	$G(x) = 5x^4 + 1$	$G(x) = x^4 - 5$

6. Функція $F(x) = 10x^5 - 4$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть формулу $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$. (ЗНО, 2020 р., додаткова сесія)

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = 10x^5 + 7$	$G(x) = 2x^6 - 4x$	$G(x) = 50x^6$	$G(x) = 50x^4$	$G(x) = x^5 - 4$

7. Функція $F(x) = 6\sin(2x) - 1$ є первісною функції $f(x)$. Знайдіть функцію $f(x)$. (ЗНО, 2011 р.)

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = -12\cos(2x)$	$f(x) = 6\cos(2x)$	$f(x) = 12\cos(2x)$	$f(x) = -3\cos 2x - x + C$	$f(x) = -6\cos 2x - x + C$

8. Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку (1; 4). (ЗНО, 2015 р.)

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 2x^2 + 2x$	$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$f(x) = x^2 + 2x + 2$	$f(x) = x^2 + 2x - 4$	$f(x) = 2x^2 + x + 1$

9. Укажіть первісну $F(x)$ для функції $f(x) = \frac{1}{2x}$. (Пробне ЗНО, 2015 р.)

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{2} \ln x $	$F(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = 2 \ln x $	$F(x) = \ln 2x $

III. Правила обчислення первісної функції

Правило 1. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, то похідна від первісної $F(x)$ дорівнює $f(x)$ або похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(F(x) + C)' = f(x) \text{ або } \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Правило 2. Диференціал від загального вигляду первісних дорівнює підінтегральному виразу: $d(F(x) + C) = f(x)dx$ або $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Оскільки диференціювання та інтегрування взаємно обернені дії, то диференціал «знищує» інтеграл і залишається лише $f(x)dx$.

IV. Первісна добутку числа на функцію

Правило 3. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$ і k — деяке число, то $kF(x)$ первісна функції $kf(x)$.

Оскільки множник можна виносити за знак похідної, то:

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

За допомогою невизначеного інтеграла, це правило можна записати так:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де k — числовий множник.

Приклад 1. Знайдіть первісну $F(x)$ функції $f(x) = \cos 3 \cdot \sqrt{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\cos 3$ — числовий множник, то, відповідно до правила, виносимо його за знак інтеграла, тому $\int \cos 3 \sqrt{x} dx = \cos 3 \int x^{-1/2} dx = -\frac{\cos 3}{x} + C$.

Відповідь. $F(x) = -\frac{\cos 3}{x} + C$.

Метод інтегрування, який полягає в прямому використанні табличних інтегралів, називають методом безпосереднього інтегрування. Як правило, цей метод потребує попереднього перетворення заданого інтеграла в табличний.

V. Первісна суми (різниці) функцій

Правило 4. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, $G(x)$ — первісна для $g(x)$, то $F(x) \pm G(x)$ — первісна суми функцій $f(x) \pm g(x)$. Тобто, інтеграл (первісна) суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці інтегралів (первісних):

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

За правилом обчислення похідної: $(F(x) \pm G(x) + C)' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$.

Правило може бути поширене на довільну кількість доданків, оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків.

Приклад 2. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = x^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \int \left(x^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2 \right) dx &= \int x^5 dx - 2 \int x^4 dx + \frac{1}{3} \int x^3 dx + 2 \int dx = \\ &= \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{12} + 2x + C.$$

VI. Первісна складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією

Правило 5. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, а k і b — деякі числа (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна функції $f(kx+b)$.

Тобто інтеграл (первісна) складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією, дорівнює:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Виконаємо перевірку:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b) + C \right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot k + C' = f(kx+b).$$

Приклад 3. Знайдіть первісну функції $y = \sin 2x$, графік якої проходить через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 1 \right)$.

Розв'язання. Знайдемо множину первісних заданої функції:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C = F(x).$$

Оскільки графік первісної функції проходить через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 1 \right)$, то координата цієї точки належить графіку первісної функції, тобто:

$$-\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 1, \quad \frac{1}{2} + C = 1, \quad \text{звідси } C = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, первісна функції $y = \sin 2x$, графік якої проходить через точку

$$\left(\frac{\pi}{2}; 1 \right): F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

VII. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На підприємстві темп надходження доходу (грн/міс), за деяку кількість місяців t , описується формулою $r(t) = 200 + 10t$, а темп витрат (грн/міс) — задано формулою $c(t) = 50 + 5e^{-0.1t}$. Установіть вираз для накопиченого прибутку $h(t)$ на підприємстві.

Задача 2. Провайдер має два канали передачі даних, у яких потік інформації передається відповідно зі швидкостями (в Мб/с) $v_1(t) = 100e^{-0.05t}$ та $v_2(t) = 50(1 - e^{-0.1t})$, де t — час (в секундах) від початку передачі даних. Виразіть загальний об'єм даних $V(t)$, що надійде на сервер провайдера за деякий проміжок часу t .

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть невизначені інтеграли:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $\int x dx$; | 2) $\int 2x^2 dx$; | 3) $\int 5x^4 dx$; |
| 4) $\int (x+1) dx$; | 5) $\int (2x+3) dx$; | 6) $\int (x^2-2) dx$; |
| 7) $\int (6x^5-4) dx$; | 8) $\int (2x^3-x+2) dx$; | 9) $\int (x^2+5x-1) dx$. |

2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:

- | | | | |
|------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $f(x) = \sin x$; | 2) $f(x) = 2 \sin x$; | 3) $f(x) = -\cos x$; | 4) $f(x) = \sin(2x)$; |
| 5) $f(x) = 5 \cos x$; | 6) $f(x) = \cos(3x)$; | 7) $f(x) = 5 \sin(3x)$; | 8) $f(x) = -3 \cos(2x)$. |

3. Автомобіль рухається зі швидкістю $v(t) = 3t$. Знайдіть вираз для подоланого шляху за час t .

4. Клітина збільшується зі швидкістю $v(t) = 2t^2$. Знайдіть формулу об'єму клітини через t секунд.

5. Витрати пального становлять $c(t) = 0,1t$. Знайдіть формулу витрат пального за час t .

6. Ріст бактерій відбувається за законом $b(t) = e^t + 2t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через t годин.

7. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через t хвилин.

8. Прибуток підприємства зростає зі швидкістю $m(t) = 5t^3 + 4$. Знайдіть суму грошей через t місяців.

Рівень В

1. Знайдіть невизначені інтеграли, де підінтегральна функція є багаточленом:

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| 1) $\int (2x^2 + 3x) dx$; | 2) $\int (x^3 + 2x^2 + 1) dx$; | 3) $\int (4x^4 - 2x) dx$; |
| 4) $\int (6x^5 + x) dx$; | 5) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \right) dx$; | 6) $\int \left(2x^3 - \frac{x}{2} + 2 \right) dx$; |
| 7) $\int (6x^5 - 4x^2 + 2) dx$; | 8) $\int (2x^3 - x + 2) dx$; | 9) $\int (-2x^2 + 5x - 7) dx$. |

2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:

1) $f(x) = \sin 2 \sin x$;

2) $f(x) = \sqrt{2} \cos x$;

3) $f(x) = -\sin 3 \cos x$;

4) $f(x) = \cos 5 \cos x$;

5) $f(x) = 4 \cos(2x)$;

6) $f(x) = -\frac{1}{2} \sin(3x)$;

7) $f(x) = 5 \sin(x-1)$;

8) $f(x) = -2 \cos(2x+1)$.

3. Розмноження бактерій відбувається за законом $b'(t) = 2e^t$. Знайдіть $b(t)$.

4. Швидкість руху автомобіля змінюється за формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Знайдіть подоланий автомобілем шлях через t секунд.

5. Виробництво фарби на підприємстві збільшується за формулою $p'(t) = 4t^3 + 8$. Знайдіть обсяг виробництва фарби.

6. Кількість населення певної країни змінюється за законом $n'(t) = 5e^{0,1t-1} - 1$. Знайдіть кількість населення країни $n(t)$ на початку спостереження.

7. Збільшення маси тварини за певний проміжок часу описується формулою $w'(t) = 2t + 3$. Знайдіть масу тварини на початку спостереження.

Рівень С

1. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$;

2) $\int \left(\frac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 1 \right) dx$;

3) $\int (x^4 + 1)(x^2 + 1) dx$;

4) $\int (x^2 + 1)^2 dx$;

5) $\int (x^3 - 1)^2 dx$;

6) $\int \left(\frac{2}{7}x^3 - 5x + 2 \right) dx$;

7) $\int (x^2 + 2)(x + 1) dx$;

8) $\int (x(2x^3 - x + 2)) dx$.

2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:

1) $f(x) = -2 \cos(x+1)$;

2) $f(x) = 2 \sin(x-1)$;

3) $f(x) = \cos x \cdot \sin(3x)$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$;

5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

6) $f(x) = \sin 5 \cdot \cos(3x+2)$;

7) $f(x) = 5 \cos 2 \sin(3x-1)$;

8) $f(x) = -\sqrt{3} \cos(2x-4)$.

3. Знайдіть інтеграл:

1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$;

2) $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$;

3) $\int \frac{(x^2 + 1)}{x^3} dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$;

5) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

6) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

4. Скутер рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 5t^3 + 4$ (у м/с²). Знайдіть закон руху скутера, якщо в момент $t = 2$ с його швидкість дорівнює 0,2 м/с, а координата становить 2 м.

5. Витрати пального під час руху автомобіля описуються рівнянням $c(t) = 0,5t - 1$. Знайдіть формулу витрат пального через 2 години від початку руху.

6. Розмноження бактерій відбувається за законом $b(t) = e^{3t-4} + 2t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через годину.
7. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через 3 хвилини.

Рефлексія

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю правило винесення числового множника за знак інтеграла. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію метод безпосереднього інтегрування. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю правило інтегрування суми та різниці функцій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію знаходити загальний вигляд первісної складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, чому дорівнює диференціал загального вигляду первісних. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я можу шукати невизначені інтеграли за допомогою таблиці інтегралів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Інтеграл в економіці. Моделі отримання прибутку.
2. Інтеграл у фізиці. Рух тіла за відомою швидкістю.
3. Застосування інтегралів у транспорті.
4. Використання інтегралів у логістиці.
5. Інтеграли та захист інформації. Моделі криптографічних протоколів на основі інтегралів.







