

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 2. Правила знаходження первісних

План уроку

1. Правила обчислення первісної функції.
2. Первісна добутку числа на функцію.
3. Первісна суми (різниці) функцій.
4. Первісна складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією.
5. Застосування правил знаходження первісних.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

відображає результати розв'язання проблемної ситуації в різноманітних формах, зокрема із використанням інформаційних технологій [12 МАО 2.4.1-2];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1] ;

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі і шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 9) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можна відновити початкову функцію лише за її похідною?
- 2) Чи можливо за графіком споживання електроенергії в будинку впродовж певного часу знайти загальну кількість використаної енергії?
- 3) Якщо відома миттєва швидкість руху автомобіля, то яким чином можна взнати пройдений шлях?
- 4) У криптоаналізі для зламу шифрів використовують швидкість перебору ключів криптосистеми, яка залежить від часу. Як знайти кількість перевірених ключів за t секунд?
- 5) Чому економісти, фізики та інженери використовують у своїй роботі інтеграли?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Задано функцію $y = 3x$. Які з наведених тверджень є правильними? (Пробне ЗНО, 2017 р.).
- I. Будь-яка первісна цієї функції є парною.
- II. Графік будь-якої первісної цієї функції проходить через точку $O(0; 0)$.
- III. Графік будь-якої первісної цієї функції не перетинає вісь x .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише III	лише I та II	лише I та III

Відповідь. А.

2. Із заглибленням у надра Землі температура порід підвищується в середньому на 3°C кожні 100 м. Прилад на першому рівні ствола шахти показує температуру породи $+12^\circ \text{C}$. За якою формулою можна визначити температуру ($y^\circ \text{C}$) породи на глибині, що на h метрів нижче від першого рівня? (ЗНО, 2021 р., додаткова сесія).

А	Б	В	Г	Д
$t(h) = 12 + \frac{3h}{100}$	$t(h) = 12 - \frac{3h}{100}$	$t(h) = 3 + \frac{100h}{12}$	$t(h) = 3 + \frac{100}{12h}$	$t(h) = 12 + \frac{100h}{3}$

Відповідь. А.

3. Для місцевості, що лежить на рівні моря, нормальний атмосферний тиск становить 760 мм рт. ст. Із підняттям на кожні 100 метрів угору атмосферний тиск знижується на 10 мм рт. ст. Укажіть з-поміж наведених формулу, за якою визначають атмосферний тиск p (у мм рт. ст.) на висоті h метрів над рівнем моря. (ЗНО, 2021 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$p(h) = \frac{760 \cdot 100}{10h}$	$p(h) = 760 - \frac{100h}{10}$	$p(h) = 760 + \frac{10h}{100}$	$p(h) = 760 + \frac{100h}{10}$	$p(h) = 760 - \frac{10h}{100}$

Відповідь. Д.

4. Яка з наведених функцій є первісною для функції $f(x) = x^{-4}$? (ЗНО, 2021 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -\frac{1}{5x^5}$	$F(x) = -\frac{3}{x^5}$	$F(x) = -\frac{4}{x^5}$	$F(x) = -\frac{5}{x^5}$	$F(x) = -\frac{1}{3x^3}$

Відповідь. Д.

5. Функція $F(x) = 5x^4 - 1$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть формулу $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$. (ЗНО, 2020 р., основна сесія).

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = x^5 - x$	$G(x) = 5x^4 - x$	$G(x) = 20x^3$	$G(x) = 5x^4 + 1$	$G(x) = x^4 - 5$

Відповідь. Г.

6. Функція $F(x) = 10x^5 - 4$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть формулу $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$. (ЗНО, 2020 р., додаткова сесія)

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = 10x^5 + 7$	$G(x) = 2x^6 - 4x$	$G(x) = 50x^6$	$G(x) = 50x^4$	$G(x) = x^5 - 4$

Відповідь. А.

7. Функція $F(x) = 6\sin(2x) - 1$ є первісною функції $f(x)$. Знайдіть функцію $f(x)$. (ЗНО, 2011 р.)

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = -12\cos(2x)$	$f(x) = 6\cos(2x)$	$f(x) = 12\cos(2x)$	$f(x) = -3\cos 2x - x + C$	$f(x) = -6\cos 2x - x + C$

Відповідь. В.

8. Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$. (ЗНО, 2015 р.)

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 2x^2 + 2x$	$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$f(x) = x^2 + 2x + 2$	$f(x) = x^2 + 2x - 4$	$f(x) = 2x^2 + x + 1$

Відповідь. Б.

9. Укажіть первісну $F(x)$ для функції $f(x) = \frac{1}{2x}$. (Пробне ЗНО, 2015 р.)

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{2} \ln x $	$F(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = 2 \ln x $	$F(x) = \ln 2x $

Відповідь. Б.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. На підприємстві темп надходження доходу (грн/міс), за деяку кількість місяців t , описується формулою $r(t) = 200 + 10t$, а темп витрат (грн/міс) — задано формулою $c(t) = 50 + 5e^{-0.1t}$. Установіть вираз для накопиченого прибутку $h(t)$ на підприємстві.

Задача 2. Провайдер має два канали передачі даних, у яких потік інформації передається відповідно зі швидкостями (в Мб/с) $v_1(t) = 100e^{-0.05t}$ та $v_2(t) = 50(1 - e^{-0.1t})$, де t — час (в секундах) від початку передачі даних. Виразіть загальний об'єм даних $V(t)$, що надійде на сервер провайдера за деякий проміжок часу t .

III. Правила обчислення первісної функції

Правило 1. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, то похідна від первісної $F(x)$ дорівнює $f(x)$ або похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(F(x) + C)' = f(x) \text{ або } \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Правило 2. Диференціал від загального вигляду первісних дорівнює підінтегральному виразу: $d(F(x) + C) = f(x)dx$ або $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Оскільки диференціювання та інтегрування взаємно обернені дії, то диференціал «знищує» інтеграл і залишається лише $f(x)dx$.

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

- 10.** Доведіть, що функція $F(x) = \frac{4x}{1+4x} - \sqrt{13}$ є первісною для функції $f(x) = 4(1+2x)^{-2}$.

Доведення. Знайдемо похідну від первісної функції $F(x)$:

$$F'(x) = \left(\frac{4x}{1+2x} - \sqrt{13} \right)' = \left(\frac{4x}{1+2x} \right)' - (\sqrt{13})' = \frac{4(1+2x) - 2 \cdot 4x}{(1+2x)^2} = \frac{4}{(1+2x)^2}.$$

Отже, $F'(x) = 4(1+2x)^{-2}$. По-іншому: $\left(\int 4(1+2x)^{-2} dx \right)' = 4(1+2x)^{-2}$.

Таким чином, функція $F(x) = \frac{4x}{1+4x} - \sqrt{13}$ є первісною функції $f(x) = 4(1+2x)^{-2}$.

IV. Первісна добутку числа на функцію

Правило 3. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$ і k — деяке число, то $kF(x)$ первісна функції $kf(x)$.

Оскільки множник можна виносити за знак похідної, то:

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

За допомогою невизначеного інтеграла, це правило можна записати так:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де k — числовий множник.

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

- 11.** Знайдіть первісну $F(x)$ функції $f(x) = \cos 3 \cdot \sqrt{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\cos 3$ — числовий множник, то, відповідно до правила, виносимо його за знак інтеграла, тому $\int \cos 3 \sqrt{x} dx = \cos 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{\cos 3}{x} + C$.

Відповідь. $F(x) = -\frac{\cos 3}{x} + C$.

- 12.** Знайдіть загальний вигляд первісних функцій $y = 2\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Запишемо початкову функцію у вигляді степеня $y = 2x^{\frac{2}{3}}$.

Тоді $\int 2x^{\frac{2}{3}} dx = 2 \int x^{\frac{2}{3}} dx = 6 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{6}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$.

Відповідь. $\frac{6}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$.

Метод інтегрування, який полягає в прямому використанні табличних інтегралів, називають методом безпосереднього інтегрування. Як правило, цей метод потребує попереднього перетворення заданого інтеграла в табличний.

V. Первісна суми (різниці) функцій

Правило 4. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, $G(x)$ — первісна для $g(x)$, то $F(x) \pm G(x)$ — первісна суми функцій $f(x) \pm g(x)$. Тобто, інтеграл (первісна) суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці інтегралів (первісних):

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

За правилом обчислення похідної: $(F(x) \pm G(x) + C)' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$.

Правило може бути поширене на довільну кількість доданків, оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків.

Ілюстративний приклад (3–4 хв)

- 13.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = x^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2$.

Розв'язання.
$$\int \left(x^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2 \right) dx = \int x^5 dx - 2 \int x^4 dx + \frac{1}{3} \int x^3 dx + 2 \int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + 2x + C.$$

Відповідь.
$$\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{12} + 2x + C.$$

- 14.** Знайдіть невизначений інтеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Тоді:
$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx.$$

Скориставшись методом безпосереднього інтегрування, вибираємо значення пер-

вісних із таблиці: $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C_1, \int dx = x + C_2.$

Таким чином, з урахуванням значень табличних інтегралів, маємо:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x + C_1 - (x + C_2) = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Загальний інтеграл буде мати іншу одну константу інтегрування, а саме:

$$C = C_1 - C_2.$$

Відповідь. $\operatorname{tg} x - x + C.$

VI. Первісна складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією

Правило 5. Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, а k і b — деякі числа (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна функції $f(kx+b)$.

Тобто інтеграл (первісна) складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією, дорівнює:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Виконаємо перевірку:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b) + C \right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot k + C' = f(kx+b).$$

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

- 15.** Знайдіть первісну функції $y = \sin 2x$, графік якої проходить через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Розв'язання. Знайдемо множину первісних заданої функції:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C = F(x).$$

Оскільки графік первісної функції проходить через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, то координата цієї точки належить графіку первісної функції, тобто:

$$-\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 1, \quad \frac{1}{2} + C = 1, \quad \text{звідси } C = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, первісна функції $y = \sin 2x$, графік якої проходить через точку

$$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right): F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь. } F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$

VII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (5–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** На підприємстві темп надходження доходу (грн/міс), за деяку кількість місяців t , описується формулою $r(t) = 200 + 10t$, а темп витрат (грн/міс) — задано формулою $c(t) = 50 + 5e^{-0.1t}$. Установіть вираз для накопиченого прибутку $h(t)$ на підприємстві.

Розв'язання. Оскільки прибуток — це різниця доходу і витрат, то накопичений прибуток це інтегрування цієї різниці за деяку кількість місяців, тобто

$$\int (r(t) - c(t))dt = \int r(t)dt - \int c(t)dt.$$

Знайдемо невизначені інтеграли зменшуваного й різниці:

$$\int (200 + 10t) dt = \int 200 dt + 10 \int t dt = 200t + 5t^2 + C_1,$$

$$\int (50 + 5e^{-0,1t}) dt = 50 \int dt + 5 \int e^{-0,1t} dt = 50t + 5 \cdot \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} = 50t - 50e^{-0,1t} + C_2.$$

Таким чином, первісна різниці, яка є накопиченим прибутком, $h(t)$ становить:
 $h(t) = 200t + 5t^2 + C_1 - (50t - 50e^{-0,1t} + C_2) = 150t + 5t^2 + 50e^{-0,1t} + C,$

де $C = C_1 - C_2$.

Відповідь. $h(t) = 150t + 5t^2 + 50e^{-0,1t} + C$.

Задача 2. Провайдер має два канали передачі даних, у яких потік інформації передається відповідно зі швидкостями (в Мб/с) $v_1(t) = 100e^{-0,05t}$ та $v_2(t) = 50(1 - e^{-0,1t})$, де t — час (в секундах) від початку передачі даних. Виразіть загальний об'єм даних $V(t)$, що надійде на сервер провайдера за деякий проміжок часу t .

Розв'язання. Оскільки об'єм даних залежить від сумарної швидкості обох потоків, що передають інформацію, то загальний об'єм — це інтегрування цієї суми за певним інтервалом часу, тобто

$$\int (v_1(t) + v_2(t)) dt = \int v_1(t) dt + \int v_2(t) dt.$$

Знайдемо невизначені інтеграли обох доданків:

$$\int (100e^{-0,05t}) dt = 100 \cdot \frac{e^{-0,05t}}{-0,05} + C_1 = -2000e^{-0,05t} + C_1,$$

$$\int 50(1 - e^{-0,1t}) dt = 50 \int dt - 50 \int e^{-0,1t} dt = 50t + 500e^{-0,1t} + C_2.$$

Таким чином, загальний об'єм отриманих даних становить:

$$V(t) = -2000e^{-0,05t} + C_1 + 50t + 500e^{-0,1t} + C_2 = 500e^{-0,1t} - 2000e^{-0,05t} + 50t + C,$$

де $C = C_1 + C_2$.

Відповідь. $V(t) = 500e^{-0,1t} - 2000e^{-0,05t} + 50t + C$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть невизначені інтеграли:

1) $\int x dx$;

2) $\int 2x^2 dx$;

3) $\int 5x^4 dx$;

4) $\int (x+1) dx$;

5) $\int (2x+3) dx$;

6) $\int (x^2 - 2) dx$;

7) $\int (6x^5 - 4) dx$;

8) $\int (2x^3 - x + 2) dx$;

9) $\int (x^2 + 5x - 1) dx$.

2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:

1) $f(x) = \sin x$;

2) $f(x) = 2 \sin x$;

3) $f(x) = -\cos x$;

4) $f(x) = \sin(2x)$;

5) $f(x) = 5 \cos x$;

6) $f(x) = \cos(3x)$;

7) $f(x) = 5 \sin(3x)$;

8) $f(x) = -3 \cos(2x)$.

3. Автомобіль рухається зі швидкістю $v(t) = 3t$. Знайдіть вираз для подоланого шляху за час t .

4. Клітина збільшується зі швидкістю $v(t) = 2t^2$. Знайдіть формулу об'єму клітини через t секунд.

5. Витрати пального становлять $c(t) = 0,1t$. Знайдіть формулу витрат пального за час t .

6. Ріст бактерій відбувається за законом $b(t) = e^t + 2t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через t годин.
7. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через t хвилин.
8. Прибуток підприємства зростає зі швидкістю $m(t) = 5t^3 + 4$. Знайдіть суму грошей через t місяців.

Рівень В

1. Знайдіть невизначені інтеграли, де підінтегральна функція є багаточленом:
 - 1) $\int (2x^2 + 3x) dx$;
 - 2) $\int (x^3 + 2x^2 + 1) dx$;
 - 3) $\int (4x^4 - 2x) dx$;
 - 4) $\int (6x^5 + x) dx$;
 - 5) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \right) dx$;
 - 6) $\int \left(2x^3 - \frac{x}{2} + 2 \right) dx$;
 - 7) $\int (6x^5 - 4x^2 + 2) dx$;
 - 8) $\int (2x^3 - x + 2) dx$;
 - 9) $\int (-2x^2 + 5x - 7) dx$.
2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:
 - 1) $f(x) = \sin 2 \sin x$;
 - 2) $f(x) = \sqrt{2} \cos x$;
 - 3) $f(x) = -\sin 3 \cos x$;
 - 4) $f(x) = \cos 5 \cos x$;
 - 5) $f(x) = 4 \cos(2x)$;
 - 6) $f(x) = -\frac{1}{2} \sin(3x)$;
 - 7) $f(x) = 5 \sin(x - 1)$;
 - 8) $f(x) = -2 \cos(2x + 1)$.
3. Розмноження бактерій відбувається за законом $b'(t) = 2e^t$. Знайдіть $b(t)$.
4. Швидкість руху автомобіля змінюється за формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Знайдіть подоланий автомобілем шлях через t секунд.
5. Виробництво фарби на підприємстві збільшується за формулою $p'(t) = 4t^3 + 8$. Знайдіть обсяг виробництва фарби.
6. Кількість населення певної країни змінюється за законом $n'(t) = 5e^{0,1t-1} - 1$. Знайдіть кількість населення країни $n(t)$ на початку спостереження.
7. Збільшення маси тварини за певний проміжок часу описується формулою $w'(t) = 2t + 3$. Знайдіть масу тварини на початку спостереження.

Рівень С

1. Знайдіть невизначений інтеграл:
 - 1) $\int (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$;
 - 2) $\int \left(\frac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 1 \right) dx$;
 - 3) $\int (x^4 + 1)(x^2 + 1) dx$;
 - 4) $\int (x^2 + 1)^2 dx$;
 - 5) $\int (x^3 - 1)^2 dx$;
 - 6) $\int \left(\frac{2}{7}x^3 - 5x + 2 \right) dx$;
 - 7) $\int (x^2 + 2)(x + 1) dx$;
 - 8) $\int (x(2x^3 - x + 2)) dx$.

2. Знайдіть первісну тригонометричної функції:

1) $f(x) = -2\cos(x+1)$;

2) $f(x) = 2\sin(x-1)$;

3) $f(x) = \cos x \cdot \sin(3x)$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$;

5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

6) $f(x) = \sin 5 \cdot \cos(3x+2)$;

7) $f(x) = 5\cos 2\sin(3x-1)$;

8) $f(x) = -\sqrt{3}\cos(2x-4)$.

3. Знайдіть інтеграл:

1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$;

2) $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$;

3) $\int \frac{(x^2 + 1)}{x^3} dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$;

5) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

6) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

4. Скутер рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 5t^3 + 4$ (у м/с²). Знайдіть закон руху скутера, якщо в момент $t = 2$ с його швидкість дорівнює 0,2 м/с, а координата становить 2 м.

5. Витрати пального під час руху автомобіля описуються рівнянням $c(t) = 0,5t - 1$. Знайдіть формулу витрат пального через 2 години від початку руху.

6. Розмноження бактерій відбувається за законом $b(t) = e^{3t-4} + 2t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через годину.

7. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через 3 хвилини.

IX. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю правило винесення числового множника за знак інтеграла.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я розумію метод безпосереднього інтегрування.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю правило інтегрування суми та різниці функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я вмію знаходити загальний вигляд первісної складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю, чому дорівнює диференціал загального вигляду первісних.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я можу шукати невизначені інтеграли за допомогою таблиці інтегралів.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Інтеграл в економіці. Моделі отримання прибутку.
2. Інтеграл у фізиці. Рух тіла за відомою швидкістю.
3. Застосування інтегралів у транспорті.
4. Використання інтегралів у логістиці.
5. Інтеграли та захист інформації. Моделі криптографічних протоколів на основі інтегралів.