12

Тема 5. Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 3. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

План уроку

1. Означення криволінійної трапеції.
2. Обчислення площі криволінійної трапеції.
3. Визначений інтеграл.
4. Формула Ньютона – Лейбніца та її застосування.
5. Площа фігури, яка обмежена графіками двох функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

відображає результати розв'язання проблемної ситуації в різноманітних формах, зокрема із використанням інформаційних технологій [12 МАО 2.4.1-2];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1] ;

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі і шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Повторіть основні поняття попередніх уроків, для цього розв'яжіть приклади на повторення.

2) Сформулюйте мотиваційні запитання та життєві задачі (без розв'язання). Розв'язання запропонуйте у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

2) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

3) Історичні відомості подавайте у межах часових можливостей.

4) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд, з урахуванням часових можливостей уроку.

5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичних задач та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як знайти площу фігури, обмеженої графіком довільної функції, якщо фігура не є трикутником або чотирикутником?

2) Чому звичайні геометричні формули неможливо застосувати для обчислення площ та об'ємів складних криволінійних фігур?

3) Як інженери визначають об'єм спаленого пального або теплову енергію, виділену за певний час?

4) Чи існує зв'язок між поняттям первісної та площею фігури, обмеженої графіком функції?

5) Чи використовується площа криволінійної трапеції для обчислення параметрів реальних процесів економіки, фінансів або проблем екології?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Знайдіть загальний вигляд первісної функції:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = e^{2x}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$;

5) $f(x) = 2x^3$; 6) $f(x) = 7x^{-2}$; 7) $f(x) = 5\cos x$; 8) $f(x) = \cos 3x$.

Відповідь. 1) $F(x) = 5x + C$; 2) $F(x) = \sin x + C$; 3) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$; 4) $F(x) = \ln|x| + C$; 5) $F(x) = \frac{x^4}{2} + C$; 6) $F(x) = \frac{-7}{x} + C$; 7) $F(x) = 5\sin x + C$; 8) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$.

2. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int\left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int\left(5x^4 - 3x^2 + \ln 2\right)dx$.

Відповідь. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C$; 2) $x^5 - x^3 + \ln 2x + C$.

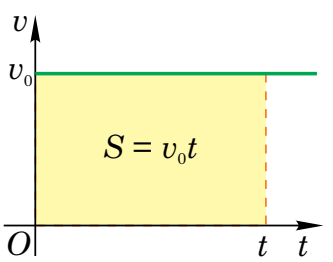
Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. ***Задача Архімеда, III ст. до н. е.*** Архімед обчислював площу сегмента параболи на певному відрізку. Він знаходив і порівнював площі прямокутників, вписаних у сегмент параболи, щоб знайти прямокутник з найбільшою площею. Такі обчислення були трудомісткою задачею. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою $y = x^2$ і віссю Ox на відрізку $0 \le x \le 2$.

Задача 2. ***Задача Ньютона, XVII ст.*** Ньютон досліджував рух тіл. Величину швидкості руху визначає функція $f(t)$, яка змінюється з часом і дорівнює: $f(t) = v(t) = 2t$. Знайдіть шлях (у м), який подолало тіло за відрізок часу від моменту $t = 2$ с до моменту $t = 5$ с.

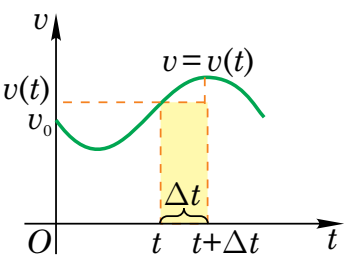
III. Означення криволінійної трапеції (5–6 хв)

Інтегрування — це дія, обернена до диференціювання. Вона дозволяє за заданою похідною функції знайти (або відновити) саму функцію. Також інтегруванням можна обчислювати площі криволінійних фігур. У задачах механіки часто доводиться знаходити координату $x(t)$ матеріальної точки, яка рухається прямолінійно, знаючи залежність її швидкості від часу $v(t)$ (бо $v(t) = x'(t)$).



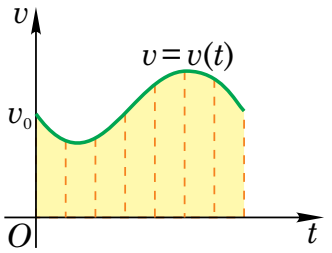
Нехай точка рухається прямолінійно зі сталою швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ є пряма $v = v_0$, яка паралельна осі часу t (див. рисунок).

Якщо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ точка перебувала в початку системи координат, то шлях s, пройдений точкою за час t, обчислюють за формулою $s = v_0t$. Величина v_0t дорівнює площі S прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими. Тобто шлях точки можна обчислити, як площу фігури, розташованої під графіком швидкості.



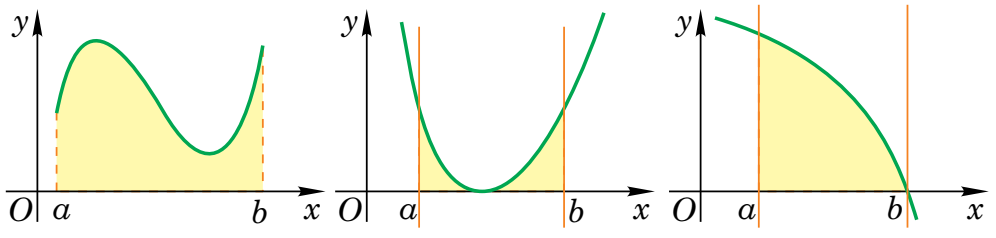
Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати незмінною лише на невеликому відрізку часу Δt. Якщо швидкість v змінюється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений точкою за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$, наближено виражається добутком $v(t) \cdot \Delta t$. На графіку (див. рисунок) цей добуток дорівнює площі прямокутника зі сторонами Δt і $v(t)$.

Точне значення шляху, пройденого точкою за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$, дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виокремленої на рисунку. Тоді весь шлях, пройдений матеріальною точкою за відрізок часу $[0; t]$, можна обчислити додаванням площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях дорівнюватиме площі зафарбованої фігури під графіком швидкості (див. рисунок).



Означення. Фігуру, яка обмежена графіком деякої функції $y = f(x)$, неперервної на відрізку $[a; b]$ осі Ox, прямими $x = a$ і $x = b$, називають ***криволінійною трапецією***. Відрізок $[a; b]$ називають ***основою криволінійної трапеції***.

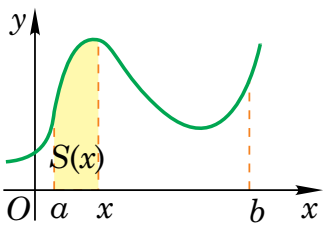
На рисунках наведено приклади криволінійних трапецій.



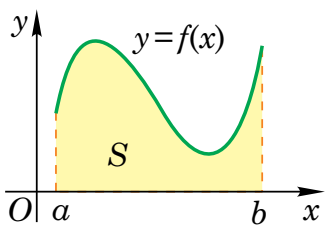
а *б* *в*

IV. Обчислення площі криволінійної трапеції за приростом первісної функції (5–7 хв)

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної функції $y = f(x)$. Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a; x]$ (див. рисунок), де x — будь-яка точка відрізка $[a; b]$.

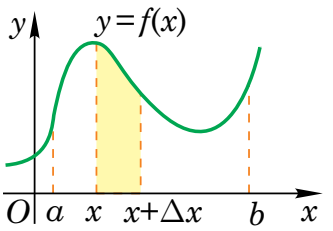


Якщо $x = a$, то відрізок $[a; x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$. Якщо $x = b$, то маємо $S(b) = S$, де S — площа криволінійної трапеції з основою $[a; b]$ (див. рисунок).

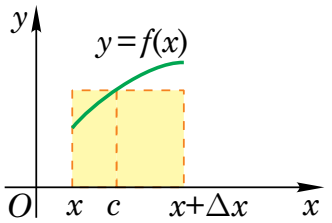


Покажемо, що функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$. Відповідно до означення похідної потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Розглянемо випадок $\Delta x > 0$, а випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно.

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x)$, то з геометричної точки зору ΔS — площа фігури (див. рисунок).



Розглянемо прямокутник із такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$ (див. рисунок).



Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x; x + \Delta x]$. Висота прямокутника дорівнює $f(c)$. За формулою площі прямокутника маємо: $\Delta S = f(c)\Delta x$.

Тоді $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = \dfrac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$.

Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$. Оскільки точка c лежить між точками x і $x + \Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Враховуючи неперервність функції $f(x)$, отримаємо що $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною функції $f(x)$.

Оскільки функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то, за основною властивістю первісної, будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, відрізняється від $S(x)$ на константу C, тобто $F(x) = S(x) + C$. Щоб знайти C, підставимо у формулу $x = a$. Отримаємо $F(a) = S(a) + C$. Оскільки $S(a) = 0$, то $C = F(a)$, тому: $S(x) = F(x) - F(a)$. Підставимо $x = b$, із врахуванням того, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, маємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Отже, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

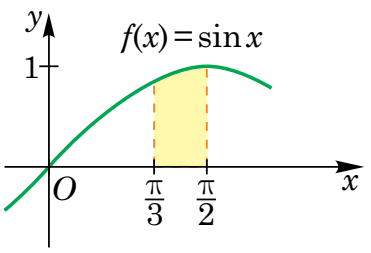
Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема. **Площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), дорівнює приросту первісної $S = F(x) = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — довільна первісна для функції $f(x)$.**

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

3. Знайдіть площу фігури (S), обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ і прямими $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо вітку синусоїди (див. рисунок). Заштрихуємо криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.



Однією із первісних функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$.

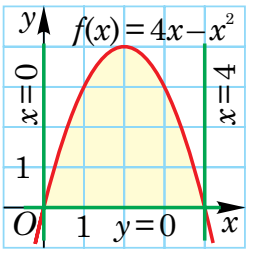
Тоді, згідно з теоремою, площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. 0,5.

4. Знайдіть площу фігури (S), обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ та прямою $y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо параболу, яка є графіком заданої функції $f(x) = 4x - x^2$ (див. рисунок).



Оскільки графік функції перетинає пряму $y = 0$ в точках $x_1 = 0$ та $x_2 = 4$, то заштрихуємо фігуру, обмежену побудованою параболою та прямими $y = 0$, $x = 0$ та $x = 4$.

Однією із первісних функції $f(x)$ на відрізку [0; 4] є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

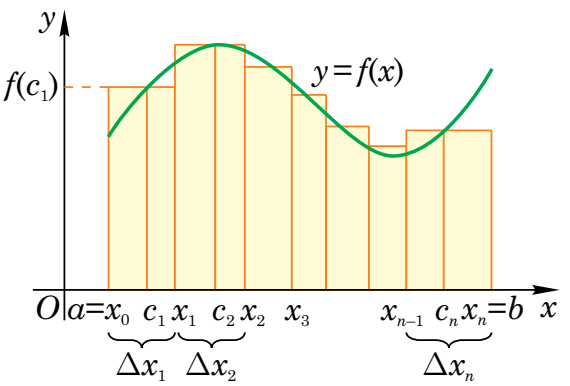
Тоді, відповідно до теореми, площа обчислюється за формулою:

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. $\frac{32}{3}$ кв. од.

V. Визначений інтеграл (5–6 хв)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена, неперервна і додатна на відрізку [a; b]. Розіб'ємо відрізок [a; b] на n частин і позначимо послідовно точки поділу через $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (див. рисунок), тобто $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.



Довжину кожного із відрізків позначимо через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Довжину найбільшого з відрізків розбиття називають діаметром (рангом або кроком розбиття). Позначимо його через d, тобто $d = \max\Delta x_k$ при $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. На кожному з відрізків розбиття довільним способом виберемо точку c_k таку, що $x_{k-1} < c_k < x_k$. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ прямокутників, які утворилися в результаті розбиття відрізка [a; b] на n частин.

Сума $f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$ називається ***інтегральною сумою***. Інтегральна сума залежить від способу розбиття відрізка [a; b] та вибору точок c_k.

Якщо існує границя інтегральної суми за умови, що $d \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття, ні від вибору точок c_k, то функція $y = f(x)$ називається *інтегровною* на відрізку [a; b]. При цьому значення границі інтегральної суми називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку [a; b] і позначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k \text{, якщо } d \to 0.$$

Числа a і b називаються *межами інтегрування*, нижньою та верхньою відповідно. Знак dx називається диференціалом і виражає характер розбиття відрізка [a; b] на відрізки Δx_k.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна та невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то площа криволінійної трапеції дорівнює визначеному інтегралу, тобто $S = \int_a^b f(x)dx$.

VI. Формула Ньютона—Лейбніца та її застосування (3–4 хв)

Різниця $F(b) - F(a)$ також є визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона—Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Отже, визначений інтеграл дорівнює приросту первісної функції $f(x)$.

Алгоритм обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона–Лейбніца.

1. Знайдіть будь-яку первісну $F(x)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.
2. Обчисліть значення первісної $F(x)$ у точках $x = b$ та $x = a$.
3. Знайдіть приріст первісної $F(b) - F(a)$, яку позначають $F(x)\Big|_a^b$.

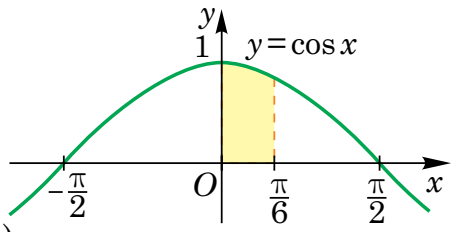
Наприклад, оскільки для функції $y = e^x$ однією з первісних є $F(x) = e^x$, то

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Ілюстративний приклад (5 хв)

5. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \cos x$, відрізком $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ осі Ox і прямими $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Побудуємо фрагмент косинусоїди $y = \cos x$ (див. рисунок).



Оскільки для функції $f(x) = \cos x$ однією з первісних є функція $F(x) = \sin x$, то:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = 0{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. 0,5 кв. од.

Правила обчислення визначених інтегралів

1. Визначений інтеграл змінює свій знак при перестановці меж інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Доведення. Використаємо формулу Ньютона—Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл в одній точці дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Доведення. Для випадку $a = b$, за формулою Ньютона—Лейбніца маємо:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

3.. Числовий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доведення. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то для функції $kf(x)$ первісною є функція $kF(x)$.

Тоді $\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$.

4. Визначений інтеграл суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці визначених інтегралів: $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Доведення. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, а $G(x)$ — первісною функції $g(x)$, то для функції $f(x) + g(x)$ первісною є функція $F(x) + G(x)$.

Тоді $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = (F(x) \pm G(x))\Big|_a^b = (F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a)) =$

$$= (F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Адитивна властивість визначеного інтеграла:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де $c \in [a; b]$.

Доведення. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

6. Визначений інтеграл складеної функції, аргумент якої є лінійною функцією, дорівнює добутку числа $\frac{1}{k}$ на функцію $F(x)$, аргументом якої є та ж лінійна функція.

$\int_a^b f(kx + c)dx = \frac{1}{k}F(kx + c)\Big|_a^b$, де k і c — числа.

Для визначених інтегралів використовують методи інтегрування, аналогічні інтегруванню невизначених інтегралів, а саме: метод безпосереднього інтегрування, метод інтегрування підстановкою або метод заміни змінної, метод внесення під знак диференціала, метод перетворення підінтегральних виразів.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx$.

Розв'язання. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right) = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

7. Обчисліть інтеграл $\int_1^4 \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральну функцію, почленним діленням, розділимо на два дроби і знайдемо інтеграл від кожного доданка, використовуючи правила інтегрування для визначеного інтеграла.

$$\int_1^4 \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx = \int_1^4 \left(4 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 4\int_1^4 dx - 2\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4x\Big|_1^4 - 4\sqrt{x}\Big|_1^4 = (16-4)-(8-4) = 8.$$

Відповідь. 8.

8. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 \left(x^4 + x^2 - 2\right) dx$.

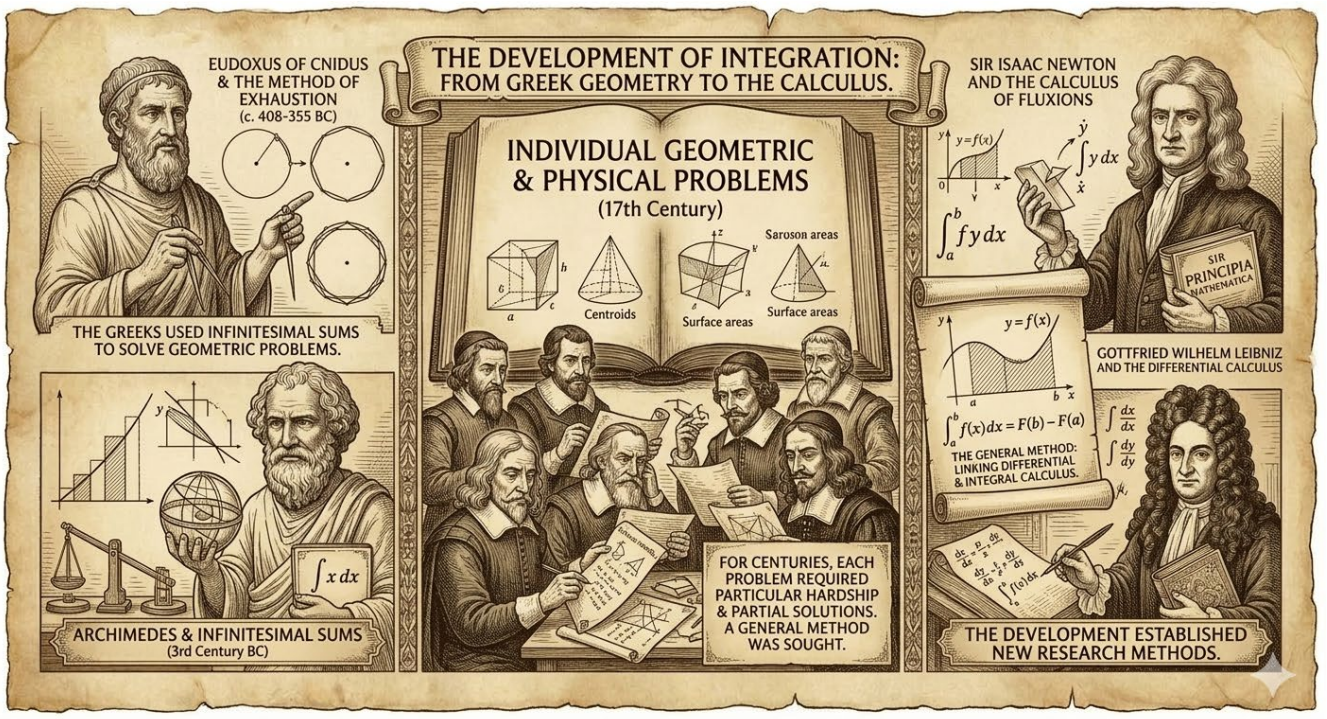
Розв'язання. Використаємо метод безпосереднього інтегрування, тобто визначений інтеграл суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці визначених інтегралів.

$$\int_1^2 \left(x^4 + x^2 - 2\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

Відповідь. $6\frac{8}{15}$.

Історична довідка

Метод обчислення сум великого числа малих величин використовували у своїх працях ще грецькі математики Евдокс Кнідський (приблизно 408 –355 рр. до н.е.) і Архімед, тобто цей метод виник задовго до появи похідної й первісної. За його допомогою було розв'язано різноманітні задачі геометрії й фізики. Проте, аж до XVIII ст., розв'язання кожної з таких задач мало частковий характер та спричиняло великі труднощі. Впродовж століть математики шукали загальний метод обчислення інтегралів. Його розробили І. Ньютон та В. Лейбніц, які довели, що обчислення інтеграла від функції можна звести до знаходження її первісної. Так було встановлено зв'язок між диференціальним та інтегральним численнями, що поклало початок новим методам досліджень.



Варто зауважити, що формула Ньютона—Лейбніца широко використовується для опису різноманітних природних процесів, наприклад, на відрізку $[t_1; t_2]$, де t_1 — початковий момент часу, t_2 — кінцевий момент часу.

Застосування формули Ньютона—Лейбніца у фізиці

1. $q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$, де q — електричний заряд, I — сила струму, t — час.

2. $Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$, де Q — кількість теплоти, c — теплоємність, t — час.

3. $A = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$, $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$, де A — робота, F — сила, N — потужність, t — час.

4. $m = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt$, де m — маса тонкого стержня, ρ — лінійна густина, t — час.

5. $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$, де s — переміщення, v — швидкість, a — прискорення, t — час.

6. $\varphi = \int_{t_1}^{t_2} w(t)dt$, де φ — кут повороту шківа, w — кутова швидкість, t — час.

Застосування формули Ньютона—Лейбніца в економіці

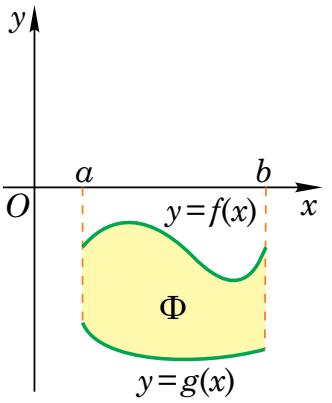
7. $V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, де V — об'єм продукції, t — час, $f(t)$ — продуктивність праці.

8. $\Pi = \int_0^t I(t)e^{-pt}dt$, де Π — дисконтована вартість грошового потоку, t — час, p — річна відсоткова ставка, I — швидкість грошового потоку;

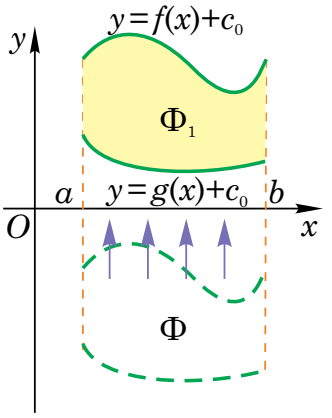
9. $CS = \int_0^{q_0} p(q)dq - p_0q_0$, $PS = p_0q_0 - \int_0^{q_0} p(q)dq$, де CS — надлишок товару для споживача, PS — надлишок товару для виробника, q — кількість товару, t — час, p — ціна товару (вартість одиниці), $(p_0; q_0)$ — точка рівноваги попиту й пропозиції.

VII. Площа фігури, яка обмежена графіками двох функцій (5–6 хв)

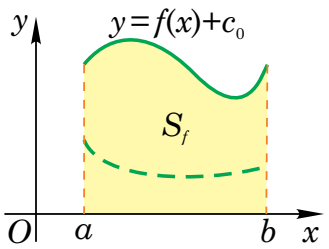
Розглянемо неперервні на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$. Покажемо, як знайти площу S фігури Ф, обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$ (див. рисунок).

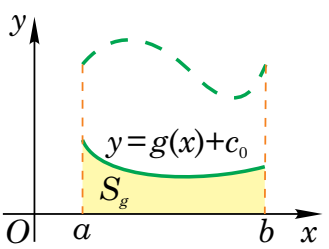


Перенесемо фігуру Ф вгору на c_0 одиниць так, щоб отримана фігура $Ф_1$ знаходилася вище від осі абсцис (див. рисунок).



Фігура $Ф_1$ обмежена графіками функцій $y = f(x) + c_0$ і $y = g(x) + c_0$ та прямими $x = a$ і $x = b$. Оскільки фігури Ф і $Ф_1$ мають рівні площі, то шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$, де S_f — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, S_g — площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (див. рисунки).





Таким чином, використовуючи властивості визначеного інтеграла:

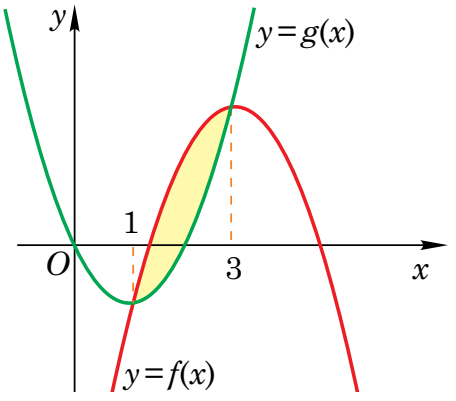
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b \left(f(x) + c_0\right) dx - \int_a^b \left(g(x) + c_0\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left((f(x) + c_0) - (g(x) + c_0)\right) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx,$$

тобто площа фігури, обмеженої графіки двох функцій дорівнює різниці площ криволінійних трапецій.

Ілюстративні приклади (5-6 хв)

9. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ та $g(x) = x^2 - 2x$.



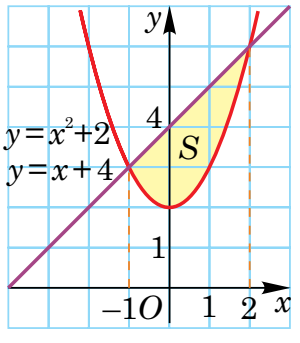
Розв'язання. Розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, установлюємо, що графіки функцій перетинаються у двох точках з абсцисами $x = 1$ та $x = 3$. На рисунку зображено фігуру, зафарбовану жовтим кольором, площу якої потрібно знайти.

Тоді: $S = \int_1^3 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6\right) dx =$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. $\frac{8}{3}$ кв. од.

10. Знайдіть площу фігури, яка обмежена графіками функцій $y = x + 4$ і $y = x^2 + 2$.



Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

Розв'яжемо рівняння $x^2 + 2 = x + 4$.

Корені квадратного рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ — абсциси точок перетину графіків: $x = -1$, $x = 2$.

Тоді:

$$S = \int_{-1}^{2} \left((x + 4) - (x^2 + 2)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4\frac{1}{2} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. 4,5 кв. од.

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (6–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. ***Задача Архімеда, III ст. до н. е.*** Архімед обчислював площу сегмента параболи на певному відрізку. Він знаходив і порівнював площі прямокутників, вписаних у сегмент параболи, щоб знайти прямокутник з найбільшою площею. Такі обчислення були трудомісткою задачею. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою $y = x^2$ і віссю Ox на відрізку $0 \le x \le 2$.

Розв'язання. Щоб знайти площу фігури, обмеженої параболою на відрізку $0 \le x \le 2$, потрібно обчислити визначений інтеграл функції $y = x^2$ на відрізку [0; 2], за формулою Ньютона – Лейбніца. Тобто, $S = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$ (кв. од.).

Відповідь. $\frac{8}{3}$ кв. од.

Задача 2. ***Задача Ньютона, XVII ст.*** Ньютон досліджував рух тіл. Величину швидкості руху визначає функція $f(t)$, яка змінюється з часом і дорівнює: $f(t) = v(t) = 2t$. Знайдіть шлях (у м), який подолало тіло за відрізок часу від моменту $t = 2$ с до моменту $t = 5$ с.

Розв'язання. Знайдемо визначений інтеграл функції $v(t) = 2t$ на відрізку [2; 5], за формулою Ньютона—Лейбніца: $\int_2^5 2t dt = t^2\Big|_2^5 = 5^2 - 2^2 = 21$ (м).

Відповідь. 21 м.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень A

1. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-1}^{2} x dx$; 2) $\int_{1}^{3} x^2 dx$; 3) $\int_{5}^{7} 3x dx$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 6) $\int_{3}^{8} dx$;

7) $\int_{-2}^{3} 3^x dx$; 8) $\int_{-2}^{0} x^3 dx$; 9) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$; 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 12) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$.

2. Запишіть межі інтегрування від 0 до 1 та обчисліть визначений інтеграл, де підінтегральна функція є багаточленом:

1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = 3x^2$; 3) $f(x) = 5x^4$;
4) $f(x) = x + 1$; 5) $f(x) = 2x + 3$; 6) $f(x) = x^2 - 2$;
7) $f(x) = 6x^5 - 4$; 8) $f(x) = 2x^3 - x + 2$; 9) $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

3. Обчисліть визначений інтеграл тригонометричної функції на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = 2\sin x$; 3) $f(x) = -\cos x$; 4) $f(x) = \sin(2x)$;
5) $f(x) = 5\cos x$; 6) $f(x) = \cos(3x)$; 7) $f(x) = 5\sin(3x)$; 8) $f(x) = -3\cos(2x)$.

4. Тіло рухається зі швидкістю $v(t) = 3t$. Знайдіть шлях, який подолало тіло за дві секунди.

5. Автомобіль рухається зі швидкістю $v(t) = 5t$. Знайдіть шлях, який подолав автомобіль за дві години.

6. Бак наповнюється рідиною зі швидкістю 4 л/хв. Знайдіть об'єм рідини в баку за 10 хвилин.

7. Клітина росте зі швидкістю $v(t) = 2t^2$. Знайдіть об'єм клітини через 5 секунд.

8. Витрати пального автомобіля описуються функцією $c(t) = 0{,}1t$. Знайдіть витрати пального за добу.

9. Тварина набирає вагу зі швидкістю $w(t) = 3t - 2$. Знайдіть вагу тварини через півроку.

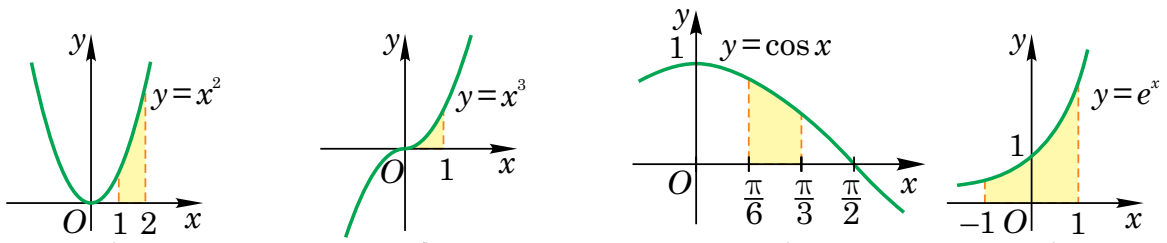
10. Збільшення кількості бактерій відбувається за законом $b(t) = e^t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через годину.

11. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через дві хвилини.

12. Сума криптовалюти збільшується зі швидкістю $m(t) = 5t^3 + 4$. Знайдіть суму криптовалюти через рік.

13. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмежену лініями:
1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$.

14. Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунках а) – г):



а) б) в) г)

Рівень В

1. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-5}^{7} 2x dx$; 2) $\int_{-1}^{2} (-2x^4) dx$; 3) $\int_{5}^{7} (3x - 1) dx$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{5} \cos x dx$; 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\cos^2 x}$; 6) $\int_{17}^{26} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;

7) $\int_{-2}^{3} 3^x dx$; 8) $\int_{-4}^{-2} (2x - 4) dx$; 9) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{3x}$;

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx$; 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{\sin^2 x}$; 12) $\int_{1}^{3} \frac{2dx}{x^4}$.

2. Запишіть межі інтегрування від –1 до 2 та обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\left(2x^2+3x\right)dx$; 2) $\int\left(x^3+2x^2+1\right)dx$; 3) $\int\left(4x^4-2x\right)dx$;

4) $\int\left(6x^5+x\right)dx$; 5) $\int\left(\frac{1}{2}x^2-2x+4\right)dx$; 6) $\int\left(2x^3-\frac{x}{2}+2\right)dx$;

7) $\int\left(6x^5-4x^2+2\right)dx$; 8) $\int\left(2x^3-x+2\right)dx$; 9) $\int\left(-2x^2+5x-7\right)dx$.

3. Обчисліть визначений інтеграл тригонометричної функції на відрізку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

1) $f(x)=\sin 2\sin x$; 2) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$;

3) $f(x)=-\sin 3\cos x$; 4) $f(x)=\cos 5\cos x$;

5) $f(x)=4\cos(2x)$; 6) $f(x)=-\frac{1}{2}\sin(3x)$;

7) $f(x)=5\sin(x-1)$; 8) $f(x)=-2\cos(2x+1)$.

4. Автомобіль рухається зі швидкістю $2t+1$ м/с. Знайдіть шлях, який подолав автомобіль за t секунд.

5. Камінь падає з прискоренням $a(t)=g=9{,}8$ м/с². Знайдіть швидкість (у м/с) через t секунд.

6. Розмноження бактерій змінюється за законом $b'(t)=2e^t$. Знайдіть $b(t)$.

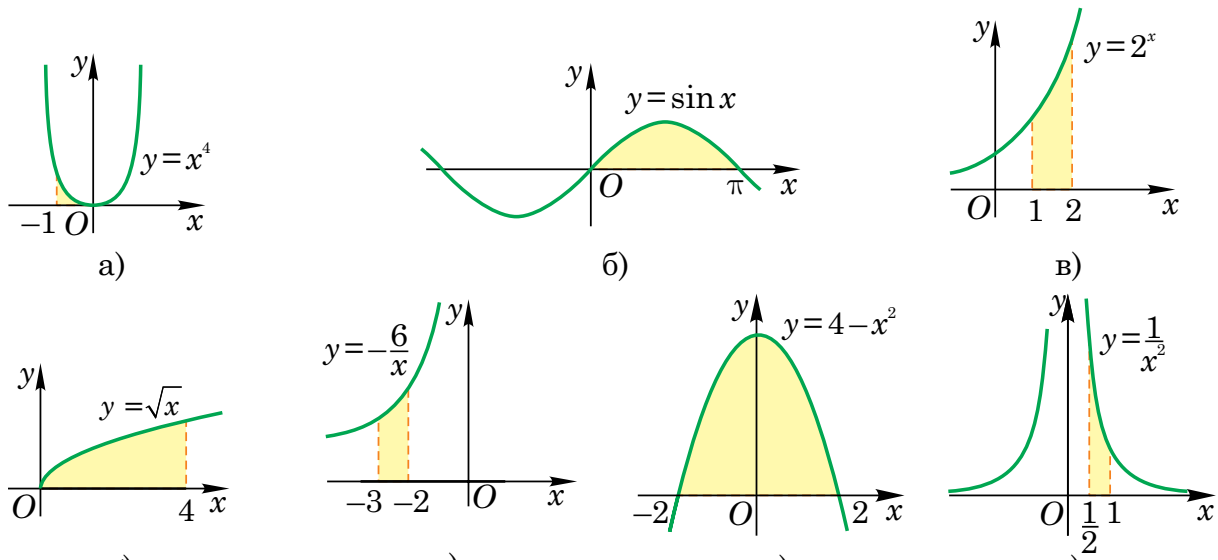
7. Кількість населення змінюється за законом $n'(t)=5e^{0.1t-1}-1$. Знайдіть $n(t)$.

8. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмежену лініями:

1) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$; 2) $y=e^x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$;

3) $y=\sqrt{5-x}$, $y=0$, $x=-4$; 4) $y=\frac{1}{2x}$, $y=0$, $x=\frac{1}{4}$, $x=2$.

9. Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунках а) – є):



Рівень С

1. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-5}^{7} x dx$; 2) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$; 3) $\int_{5}^{7} 2x dx$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$; 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 6) $\int_{16}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

7) $\int_{-2}^{3} 3^x dx$; 8) $\int_{-4}^{-2} (2x+4) dx$; 9) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$; 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 12) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$.

2. Запишіть межі інтегрування від –1 до 1 та обчисліть визначений інтеграл, де підінтегральна функція є багаточленом:

1) $\int \left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 1\right) dx$;

3) $\int \left(x^4 + 1\right)\left(x^2 + 1\right) dx$; 4) $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$;

5) $\int \left(x^3 - 1\right)^2 dx$; 6) $\int \left(\frac{2}{7}x^3 - 5x + 2\right) dx$;

7) $\int \left(x^2 + 2\right)\left(x + 1\right) dx$; 8) $\int \left(x(2x^3 - x + 2)\right) dx$.

3. Обчисліть визначений інтеграл тригонометричної функції на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

1) $f(x) = -2\cos(x+1)$; 2) $f(x) = 2\sin(x-1)$;

3) $f(x) = \cos x \cdot \sin(3x)$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$;

5) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; 6) $f(x) = \sin 5 \cdot \cos(3x+2)$;

7) $f(x) = 5\cos 2 \sin(3x-1)$; 8) $f(x) = -\sqrt{3}\cos(2x-4)$.

4. Знайдіть інтеграл з межами інтегрування від –1 до 1:

1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$; 2) $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$; 3) $\int \frac{\left(x^2 + 1\right)}{x^3} dx$;

4) $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^3}{x} dx$; 5) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; 6) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.

5. Скутер рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 5t^3 + 4$ (у м/с^2). Знайдіть закон руху скутера, якщо в момент $t = 2$ *с* його швидкість дорівнює 0,2 м/с, а координата становить 2.

6. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$. Запишіть формулу залежності координати матеріальної точки від часу, якщо відомо, що в момент $t = \frac{\pi}{2}$ точка була на відстані 2 м від точки пуску (точку пуску вважайте за початок координат).

7. Клітина росте зі швидкістю $v(t) = 2t^2 + 4t - 2$. Знайдіть об'єм клітини через 10 секунд.

8. Розмноження бактерій відбувається за законом $b(t) = e^{3t-4} + 2t - 1$. Знайдіть кількість бактерій через годину.

9. Рівень рідини збільшується зі швидкістю $h(t) = 4t^2 - 2$. Знайдіть висоту рідини через 3 хвилини.

10. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмежену лініями:

1) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;
2) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;
3) $y = -x^2$, $y = x - 2$;
4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;
5) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$;
6) $y = 3\sin x$, $y = -2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

X. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію поняття криволінійної трапеції.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю формулу Ньютона—Лейбніца.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю властивості та правила інтегрування визначених інтегралів.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я вмію знаходити площі криволінійних трапецій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я вмію знаходити площі фігур, обмежених лініями та осями координат.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я можу обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона—Лейбніца.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми учнівських проєктів

1. Визначений інтеграл у фізиці.
2. Визначений інтеграл в економіці.
3. Визначений інтеграл у геометрії.
4. Визначений інтеграл у географії.
5. Визначений інтеграл у хімії.
6. Визначений інтеграл у біології.