

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 4. Обчислення визначених інтегралів та площ криволінійних трапецій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите властивості визначеного інтеграла;
- 2) навчитеся давати оцінку визначеному інтегралу;
- 3) навчитеся обчислювати площі фігур, обмежених графіками функцій;
- 4) удосконалисте навички обчислення площ фігур через визначені інтеграли;
- 5) розв'яжете практичні задачі на застосування визначеного інтеграла.

II. Повторення

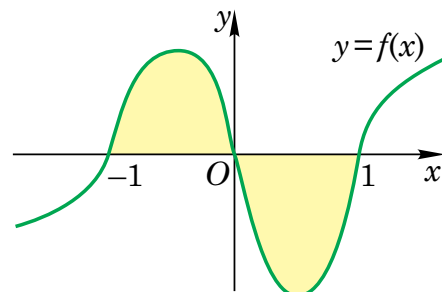
1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
2. За якою формулою обчислюють визначені інтеграли?
3. Який алгоритм обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона—Лейбніца?
4. Назвіть властивості визначених інтегралів.
5. Обчисліть: $\int_{-1}^2 2x^2 dx$. (ЗНО, 2005 р.).

А	Б	В	Г	Д
4	-4	6	-6	8

6. Обчисліть: $\int_1^2 6x^2 dx$. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
12	14	18	22	42

7. На рисунку зображено графік неперервної функції $y = f(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури. (ЗНО, додаткова сесія 2014 р.).



А	Б	В	Г	Д
$\int_{-1}^1 f(x) dx$	$2 \int_0^1 f(x) dx$	$\int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx$	$2 \int_{-1}^0 f(x) dx$	$\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

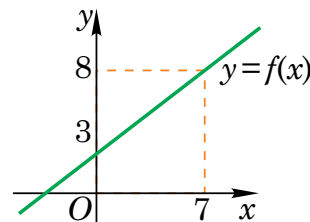
8. Обчисліть $\int_2^3 \frac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} dx$. (Пробне ЗНО, 2012 р.).

9. Задано функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 7 - x$.

1) Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. У прямокутній системі координат зобразіть фігуру, обмежену цими графіками.

2) Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$. (ЗНО, 2009 р.).

10. Обчисліть $\int_0^7 f(x) dx$, використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$. (ЗНО, 2012 р.).



III. Обчислення визначених інтегралів

Для визначених інтегралів використовують ті самі методи інтегрування, що й для невизначених інтегралів, а саме: метод безпосереднього інтегрування, метод інтегрування підстановкою або метод заміни змінної, метод внесення під знак диференціала, метод перетворення підінтегральних виразів.

Властивості визначеного інтеграла

Властивість 1. Величина визначеного інтеграла залежить лише від меж інтегрування та виду підінтегральної функції і не залежить від позначення змінної інтегрування,

тобто $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$ тощо.

Властивість 2. Визначений інтеграл змінює свій знак при перестановці меж інтегрування:

$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Властивість 3. Визначений інтеграл в одній точці дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Властивість 4. Числовий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Властивість 5. Визначений інтеграл суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці визначених інтегралів: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Властивість 6. Адитивна властивість визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ де } c \in [a; b].$$

Властивість 7. Геометрична властивість визначеного інтеграла:

$$\text{Якщо } f(x) > 0 \text{ (} f(x) \geq 0 \text{)} \text{ на відрізку } [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx > 0 \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0 \right).$$

Властивість 8. Якщо $f(x) < 0$ ($f(x) \leq 0$) для будь-якого $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx < 0 \left(\int_a^b f(x)dx \leq 0 \right).$$

Властивість 9. Якщо $f(x) \geq g(x)$ на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Властивість 10. Оцінка визначеного інтеграла. Якщо $m \leq f(x) \leq M$ для будь-якого

$$x \in [a; b], \text{ то } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

IV. Обчислення площ криволінійних трапецій за графіками функцій

Площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю абсцис, знаходиться за формулою: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо ж функція неперервна і недодатна, то площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

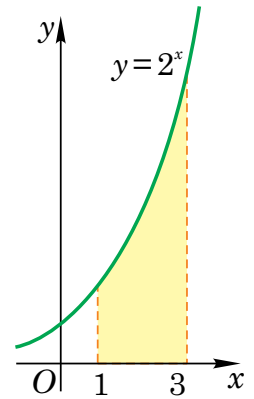
Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ — неперервні на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Приклад 1. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.

Розв'язання.

$$S = \int_1^3 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^3 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{8-2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $\frac{6}{\ln 2}$ кв. од.

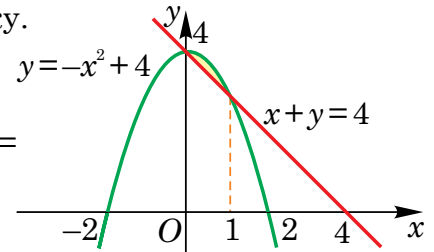


Приклад 2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.

Розв'язання.

$$S = \int_0^1 ((-x^2 + 4) - (4 - x)) dx = -\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $\frac{1}{6}$ кв. од.



V. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Напруга в електричному колі рівномірно збільшується впродовж двох секунд від $U_0 = 100$ В до $U_1 = 220$ В. Знайдіть середню силу струму за цей час, якщо опір кола $R = 100$ Ом. В який момент часу значення сили струму дорівнює середньому значенню?

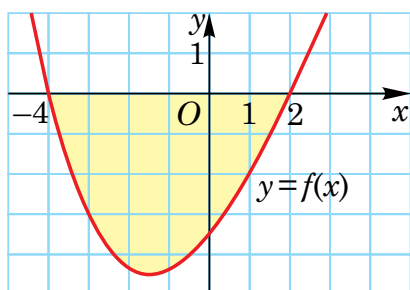
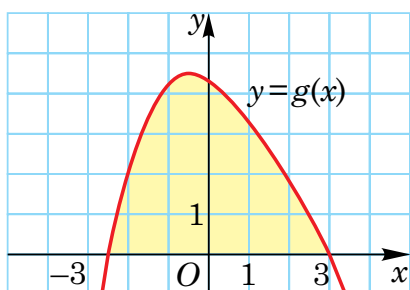
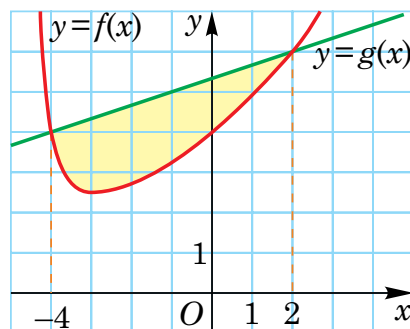
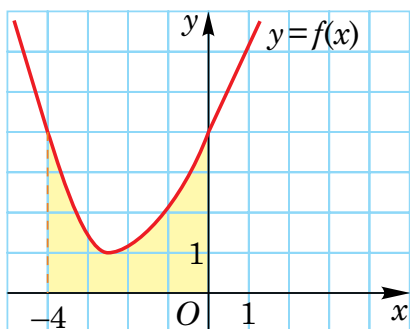
Задача 2. Біологи в лабораторії досліджують нову культуру і вивчають миттєвий темп приросту кількості клітин (клітин/годину), який виражається функцією $r(t) = 5 + 2\sin t$. У момент $t = 0$ додаткових клітин не було. Знайдіть загальну кількість нових клітин, які з'являються за перші 10 годин.

Задача 3. Потужність електроприладу (у ватах) змінюється за законом $P(t) = 100 + 20e^{-0,1t}$, де перший доданок — це 100 Вт, постійна базова потужність, а другий доданок — додаткове навантаження, що експоненційно спадає. Знайдіть загальну енергію, спожиту за добу електроприладом.

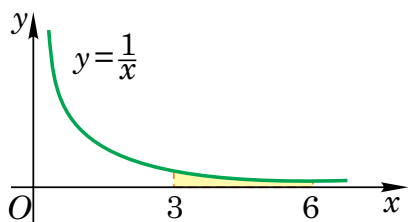
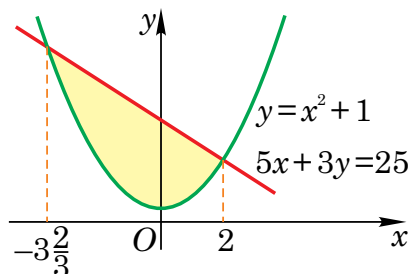
VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

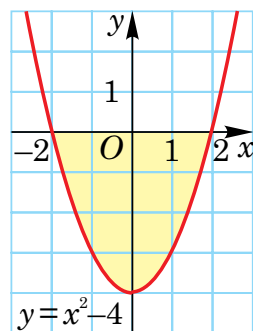
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



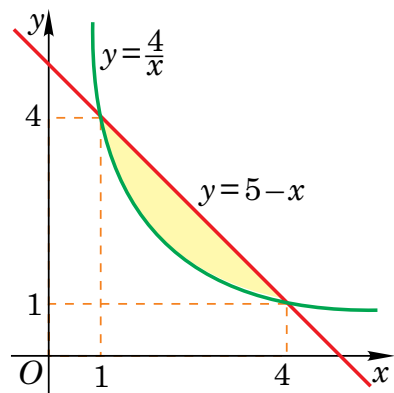
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку:



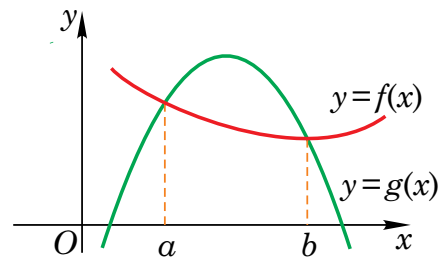
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 4$ і віссю абсцис (див. рисунок).



4. Обчисліть площу S заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.

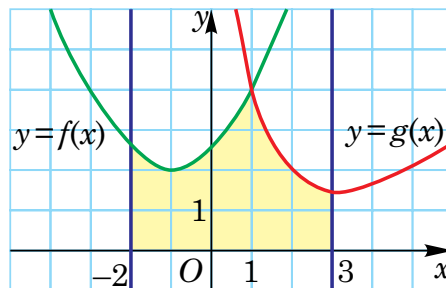
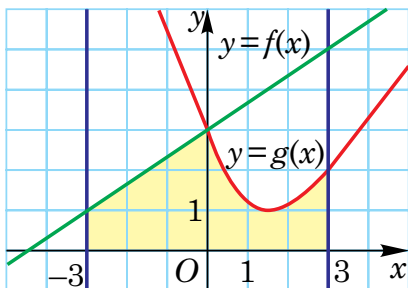


5. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Порівняйте значення виразів $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$.

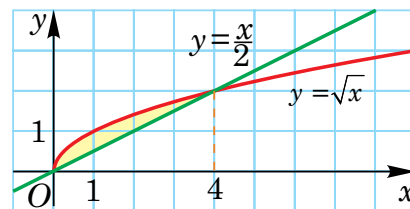
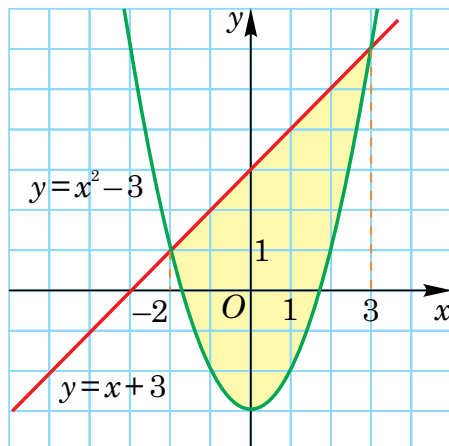
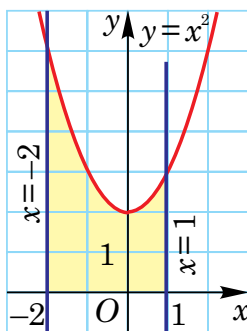


Рівень В

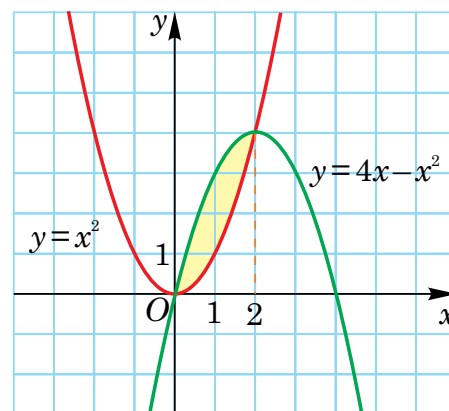
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



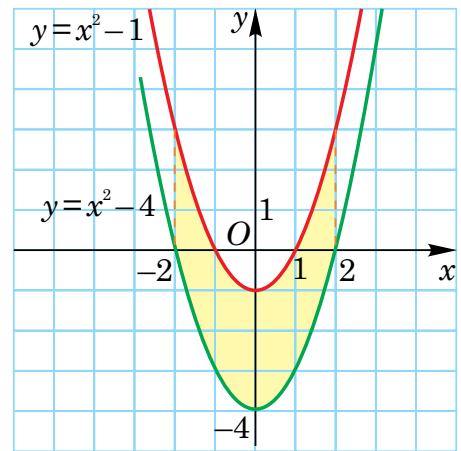
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку:



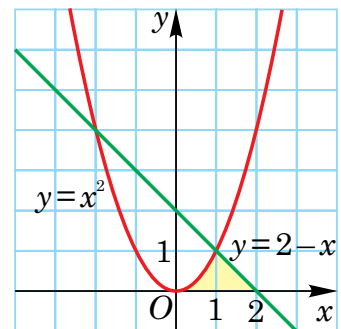
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$ (див. рисунок).



4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$ (див. рисунок).

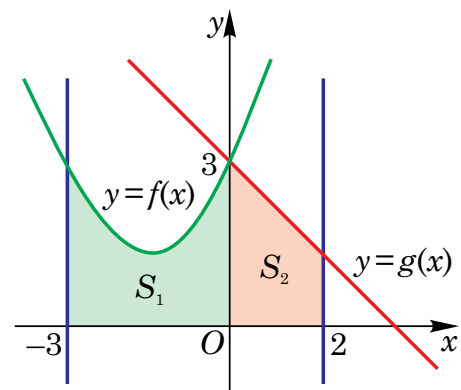


5. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x^2$ і $y = 2 - x$ та віссю Ox (див. рисунок).

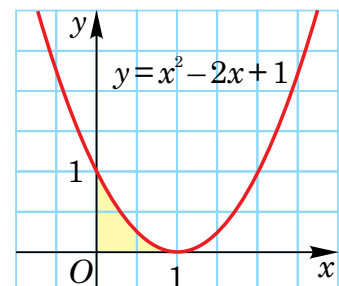
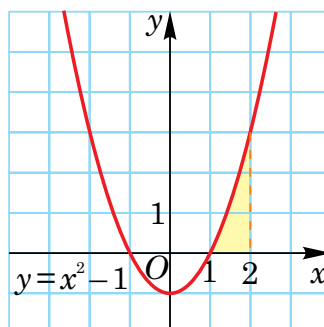
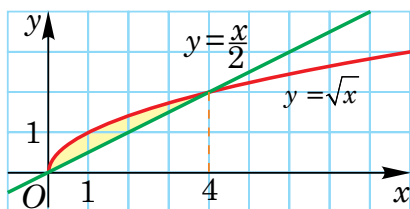


Рівень С

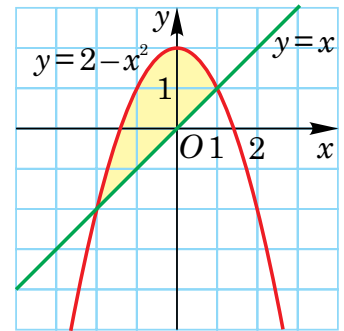
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



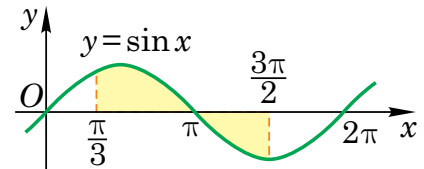
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.



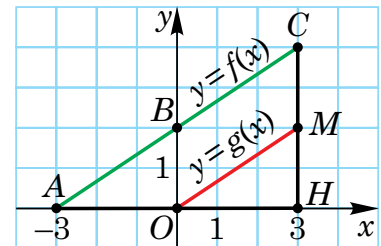
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x$, $y = 2 - x^2$ (див. рисунок).



4. Обчисліть площу зафарбованої фігури, яка обмежена синусоїдою $y = \sin x$ (див. рисунок).



5. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$. Установіть відповідність між інтегралом (1–4) та багатокутником (А–Д), площа якого обчислюється заданим інтегралом.



Інтеграл

1 $S = \int_{-3}^3 f(x) dx$

2 $S = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$

3 $S = \int_0^3 f(x) dx$

4 $S = \int_0^3 g(x) dx$

Багатокутник

А трикутник OMH

Б трапеція $OBCH$

В паралелограм $OBCM$

Г трапеція $OACM$

Д трикутник ACH

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Рефлексія

- Я розумію, як за зображеною фігурою записати формулу обчислення площі фігури.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я знаю формулу обчислення площі криволінійної трапеції.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я знаю властивості та правила інтегрування визначених інтегралів.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію знаходити площі криволінійних трапецій.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію знаходити площі фігур, обмежених графіками функцій та осями координат.
Так Ще треба потренуватися Ні

6. Я вмію застосовувати визначені інтеграли для розв'язання практичних задач.
- Так Ще треба потренуватися Ні
7. Я можу оцінювати визначені інтеграли, використовуючи властивості нерівностей.
- Так Ще треба потренуватися Ні







