

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 4. Обчислення визначених інтегралів та площ криволінійних трапецій

План уроку

1. Обчислення визначених інтегралів.
2. Обчислення площ криволінійних трапецій за побудованими графіками функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Повторіть основні поняття попередніх уроків, для цього проведіть усне фронтальне опитування з теоретичних питань та розв'яжіть завдання ЗНО і НМТ попередніх років, на ваш вибір.
- 2) Сформулюйте мотиваційні запитання та життєві задачі (без розв'язання). Розв'язання запропонуйте у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 2) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 3) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд з урахуванням часових можливостей уроку.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Обов'язково пропонуйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичних задач та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків та навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи залежить інтеграл від позначення змінної інтегрування?
- 2) Чи залежить результат обчислення інтеграла за формулою Ньютона—Лейбніца від вибору первісної підінтегральної функції?
- 3) Чи може інтеграл від додатної функції бути меншим від нуля чи дорівнювати нулю?
- 4) Яку геометричну інтерпретацію мають формули прямокутників або трапецій?
- 5) Чи використовують визначений інтеграл для розв'язання практичних задач?

II. Повторення. Фронтальне опитування (5–6 хв)

1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
Відповідь. Фігуру, яка обмежена графіком деякої функції, неперервної на відріжку $[a; b]$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$.
2. За якою формулою обчислюють визначені інтеграли?
Відповідь. За формулою Ньютона—Лейбніца.
3. Який алгоритм обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона—Лейбніца?
Відповідь. 1) Знайдіть будь-яку первісну функції на відріжку $[a; b]$.
2) Обчисліть значення первісної на кінцях відрізка.
3) Знайдіть приріст первісної функції.
4. Назвіть властивості визначених інтегралів.
Відповідь. 1) Сталий множник можна винести за знак інтеграла.
2) Інтеграл від суми чи різниці функцій дорівнює сумі чи різниці інтегралів від цих функцій.
3) Відрізок меж інтеграла можна розбити будь-якою його точкою на суму двох інтегралів.
4) Інтеграл від однієї точки дорівнює нулю.
5) Визначений інтеграл змінює свій знак при перестановці меж інтегрування.

5. Обчисліть: $\int_{-1}^2 2x^2 dx$. (ЗНО, 2005 р.).

А	Б	В	Г	Д
4	-4	6	-6	8

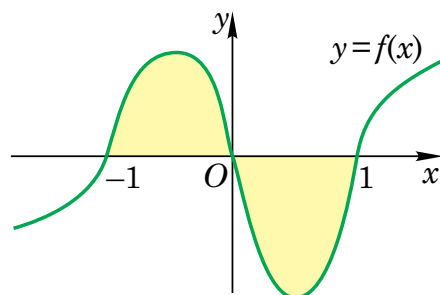
Відповідь. В.

6. Обчисліть: $\int_1^2 6x^2 dx$. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
12	14	18	22	42

Відповідь. Б.

7. На рисунку зображено графік неперервної функції $y = f(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури. (ЗНО, додаткова сесія 2014 р.).



А	Б	В	Г	Д
$\int_{-1}^1 f(x) dx$	$2 \int_0^1 f(x) dx$	$\int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx$	$2 \int_{-1}^0 f(x) dx$	$\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

Відповідь. Д.

8. Обчисліть $\int_2^3 \frac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} dx$. (Пробне ЗНО, 2012 р.).

Відповідь. 15,25.

9. Задано функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 7 - x$.

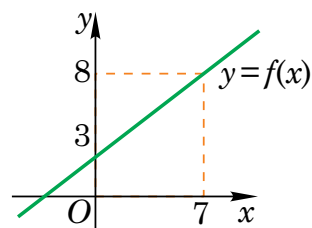
1) Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. У прямокутній системі координат зобразіть фігуру, обмежену цими графіками.

2) Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$. (ЗНО, 2009 р.).

Відповідь. 1) -3; 2) $20\frac{5}{6}$ кв. од.

10. Обчисліть $\int_0^7 f(x) dx$, використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$. (ЗНО, 2012 р.).

Відповідь. 38,5.



Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Напруга в електричному колі рівномірно збільшується впродовж двох секунд від $U_0 = 100$ В до $U_1 = 220$ В. Знайдіть середню силу струму за цей час, якщо опір кола $R = 100$ Ом. В який момент часу значення сили струму дорівнює середньому значенню?

Задача 2. Біологи в лабораторії досліджують нову культуру і вивчають миттєвий темп приросту кількості клітин (клітин/годину), який виражається функцією $r(t) = 5 + 2\sin t$. У момент $t = 0$ додаткових клітин не було. Знайдіть загальну кількість нових клітин, які з'являються за перші 10 годин.

Задача 3. Потужність електроприладу (у ватах) змінюється за законом $P(t) = 100 + 20e^{-0,1t}$, де перший доданок — це 100 Вт, постійна базова потужність, а другий доданок — додаткове навантаження, що експоненційно спадає. Знайдіть загальну енергію, спожиту за добу електроприладом.

III. Обчислення визначених інтегралів (5–6 хв)

Для визначених інтегралів використовують ті самі методи інтегрування, що й для невизначених інтегралів, а саме: метод безпосереднього інтегрування, метод інтегрування підстановкою або метод заміни змінної, метод внесення під знак диференціала, метод перетворення підінтегральних виразів.

Властивості визначеного інтеграла

Властивість 1. Величина визначеного інтеграла залежить лише від меж інтегрування та виду підінтегральної функції і не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ тощо.}$$

Властивість 2. Визначений інтеграл змінює свій знак при перестановці меж інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Властивість 3. Визначений інтеграл в одній точці дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Властивість 4. Числовий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Властивість 5. Визначений інтеграл суми або різниці функцій дорівнює сумі або різниці визначених інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Властивість 6. Адитивна властивість визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ де } c \in [a; b].$$

Властивість 7. Геометрична властивість визначеного інтеграла:

Якщо $f(x) > 0$ ($f(x) \geq 0$) на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$ $\left(\int_a^b f(x)dx \geq 0 \right)$.

Властивість 8. Якщо $f(x) < 0$ ($f(x) \leq 0$) для будь-якого $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx < 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \leq 0 \right).$$

Властивість 9. Якщо $f(x) \geq g(x)$ на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Властивість 10. Оцінка визначеного інтеграла. Якщо $m \leq f(x) \leq M$ для будь-якого

$$x \in [a; b], \text{ то } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ілюстративний приклад (3 хв)

11. Оцініть інтеграл $\int_{10}^{100} \lg x dx$.

Розв'язання. Функція $y = \lg x$ — зростаюча, тому на відрізку $[10; 100]$ виконується нерівність $1 = \lg 10 \leq \lg x \leq \lg 100 = 2$.

Отже, за властивістю 10, отримаємо:

$$90 = 1(100 - 10) \leq \int_{10}^{100} \lg x dx \leq 2(100 - 10) = 180.$$

$$\text{Відповідь. } \int_{10}^{100} \lg x dx \in [90; 180].$$

IV. Обчислення площ криволінійних трапецій за графіками функцій (5 хв)

Площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю абсцис, знаходиться за формулою: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо ж функція неперервна і недодатна, то площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ — неперервні на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$

та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

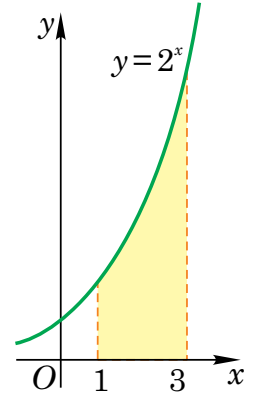
Ілюстративні приклади (6–8 хв)

- 12.** Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.

Розв'язання.

$$S = \int_1^3 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^3 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{8-2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $\frac{6}{\ln 2}$ кв. од.

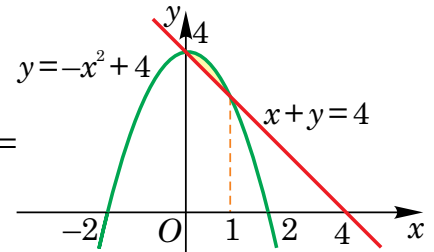


- 13.** Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.

Розв'язання.

$$S = \int_0^1 ((-x^2 + 4) - (4 - x)) dx = -\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $\frac{1}{6}$ кв. од.



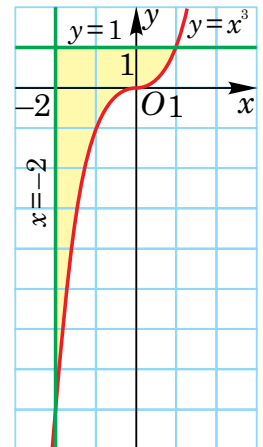
- 14.** Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.

Розв'язання.

$$S = \int_{-2}^1 (1 - x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^1 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \left(-2 - \frac{(-2)^4}{4} \right) = \frac{3}{4} + 6 =$$

$= 6,75 \text{ (кв. од.)}.$

Відповідь. 6,75 кв. од.



V. Розв'язування практичних задач. Групова активність (5–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** Напруга в електричному колі рівномірно збільшується впродовж двох секунд від $U_0 = 100$ В до $U_1 = 220$ В. Знайдіть середню силу струму за цей час, якщо опір кола $R = 100$ Ом. В який момент часу значення сили струму дорівнює середньому значенню?

Розв'язання. Знайдемо залежність напруги від часу. За умовою задачі, напруга лінійно залежить від часу (збільшується рівномірно). Тому $U(t) = kt + b$.

Враховуючи, що $U(0) = 100$, $U(2) = 220$, отримуємо $k = 60$, $b = 100$.

Отже, $U(t) = 60t + 100$.

Залежність сили струму від часу виражається формулою:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{60t + 100}{100} = 0,6t + 1.$$

Згідно з означенням, середня сила струму на проміжку $[0; 2]$ становить:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \int_0^2 (0,6t + 1) dt = \frac{1}{2} (0,3t^2 + t) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (0,3 \cdot 2^2 + 2) = 1,6 \text{ (А)}.$$

Знайдемо момент часу t_0 , коли сила струму набуває значення 1,6 А:

$$0,6t_0 + 1 = 1,6, \text{ звідси } t_0 = 1 \text{ с.}$$

Відповідь. 1, 6 А; $t_0 = 1$ с.

Задача 2. Біологи в лабораторії досліджують нову культуру і вивчають миттєвий темп приросту кількості клітин (клітин/годину), який виражається функцією $r(t) = 5 + 2\sin t$. У момент $t = 0$ додаткових клітин не було. Знайдіть загальну кількість нових клітин, які з'являються за перші 10 годин.

Розв'язання. За умовою, підінтегральна функція виражена формулою $r(t) = 5 + 2\sin t$. Знайдемо її первісну: $\int (5 + 2\sin t) dt = 5 \int dt + 2 \int \sin t dt = 5t - 2\cos t + C$.

Тоді кількість клітин обчислюємо в межах часового проміжку від 0 до 10 годин, за формулою Ньютона—Лейбніца:

$$N = \int_0^{10} (5 + 2\sin t) dt = (5t - 2\cos t) \Big|_0^{10} = (5 \cdot 10 - 2\cos 10) - (5 \cdot 0 - 2\cos 0) = 52 - 2\cos 10.$$

Обчислимо: $\cos 10 \approx -0,839$.

Тому, $N = 52 - 2 \cdot (-0,839) = 52 + 1,678 \approx 53,678$.

Отже, точна числова кількість клітин у тих одиницях, в яких заданий темп приросту, становить $N \approx 53,678$.

Відповідь. ≈ 54 клітини.

Задача 3. Потужність електроприладу (у ватах) змінюється за законом $P(t) = 100 + 20e^{-0,1t}$, де перший доданок — це 100 Вт, постійна базова потужність, а другий доданок — додаткове навантаження, що експоненційно спадає. Знайдіть загальну енергію, спожиту за добу електроприладом.

Розв'язання. Оскільки потужність електроприладу (у ватах) змінюється за законом $P(t) = 100 + 20e^{-0,1t}$, то обчислимо спожиту за добу енергію як визначений інтеграл, в межах 24-х годин.

$$\text{Тобто, } E = \int_0^{24} P(t) dt = \int_0^{24} (100 + 20e^{-0,1t}) dt.$$

Знайдемо первісну, інтегруючи по змінній t , за правилами інтегрування з урахуванням того, що: $\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C$, де $a = -0,1$:

$$F(t) = \int (100 + 20e^{-0,1t}) dt = 100 \int dt + 20 \int e^{-0,1t} dt = 100t - 200e^{-0,1t} + C.$$

$$\text{Тому, } E = (F(t)) \Big|_0^{24} = F(24) - F(0) = (100 \cdot 24 - 200e^{-0,1 \cdot 24}) - (100 \cdot 0 - 200e^0).$$

Оскільки $e^{-2,4} \approx 0,09071795$, то:

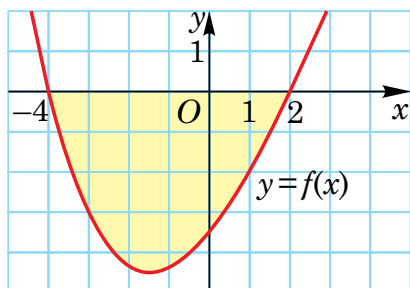
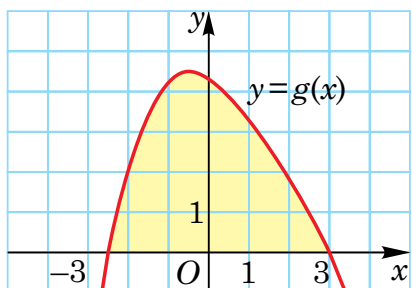
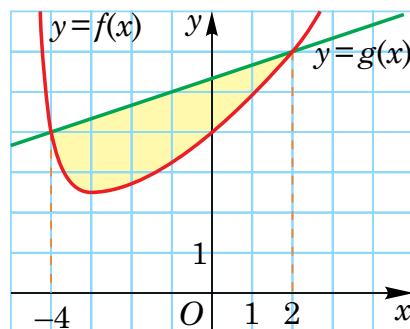
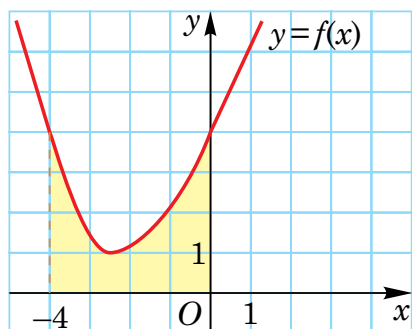
$$E = 2400 - 200 \cdot 0,09071795 + 200 \approx 2600 - 18,14359 \approx 2581,8564 \text{ (Вт)} = 2,582 \text{ (кВт)}.$$

Відповідь. 2,582 кВт.

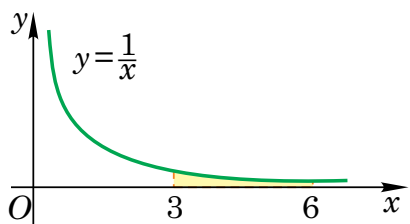
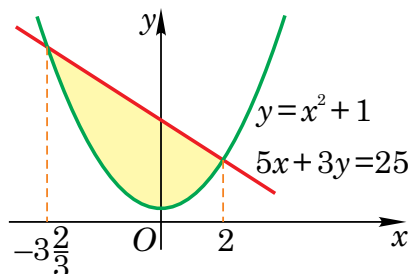
VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

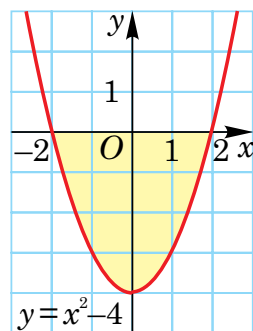
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



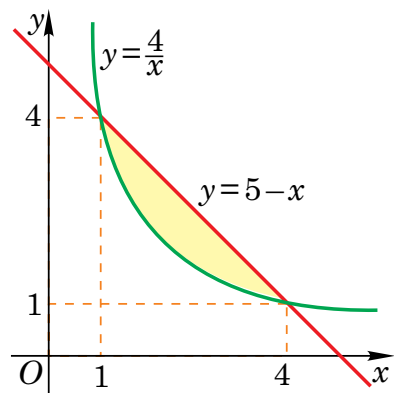
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку:



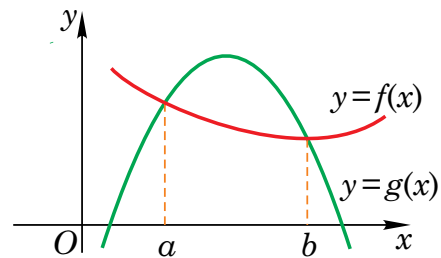
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 4$ і віссю абсцис (див. рисунок).



4. Обчисліть площу S заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.

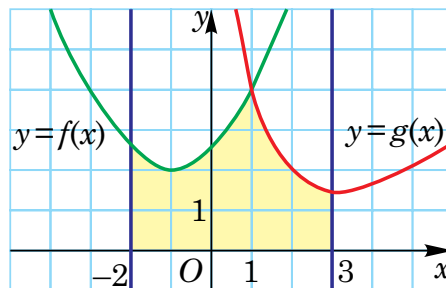
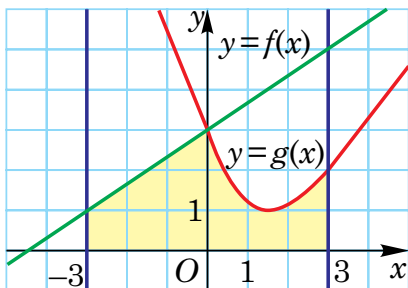


5. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Порівняйте значення виразів $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$.

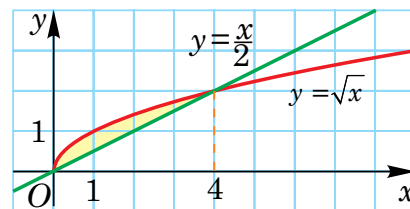
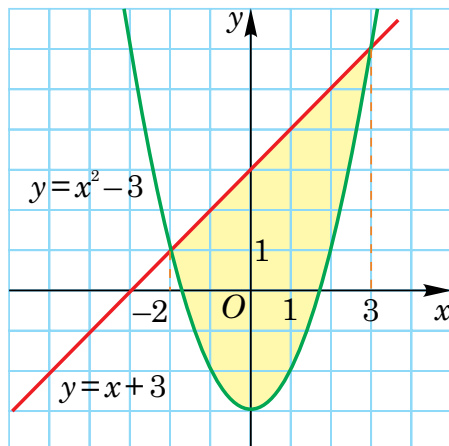
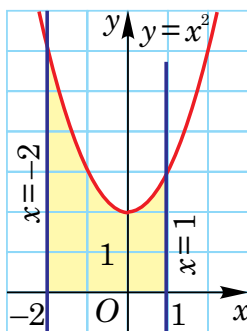


Рівень В

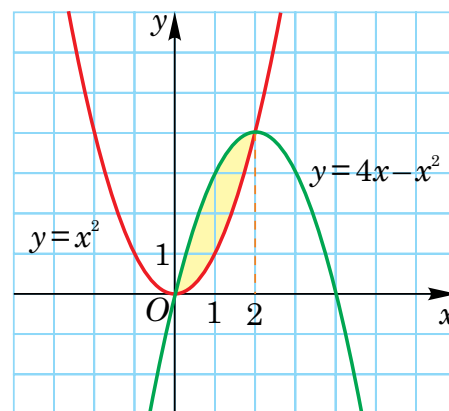
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



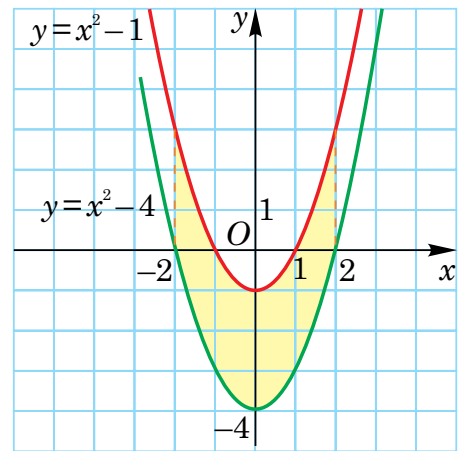
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку:



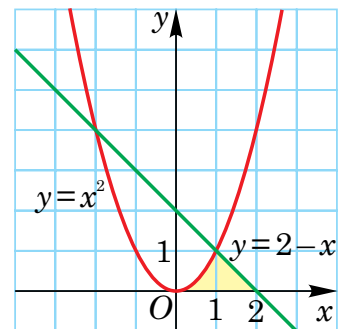
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$ (див. рисунок).



4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$ (див. рисунок).

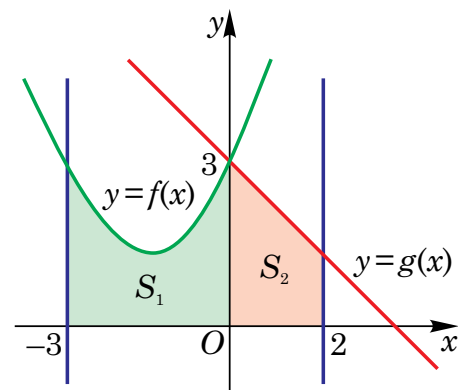


5. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x^2$ і $y = 2 - x$ та віссю Ox (див. рисунок).

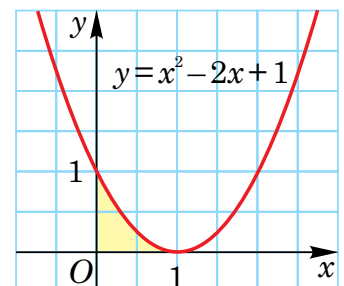
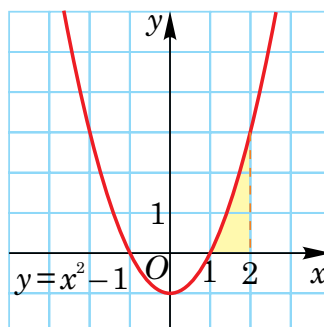
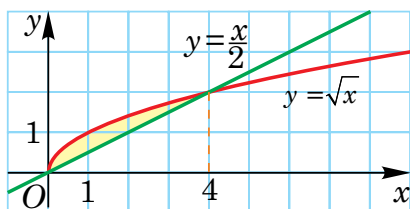


Рівень С

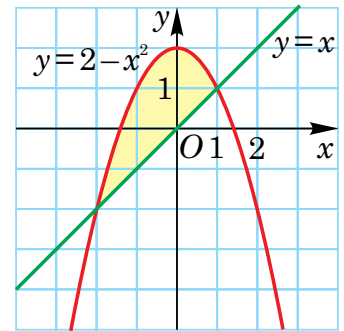
1. Запишіть формулу обчислення площі фігури, зображеної на рисунку:



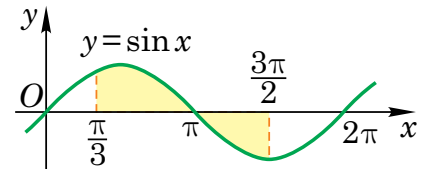
2. Знайдіть площу фігури, зображеної на рисунку.



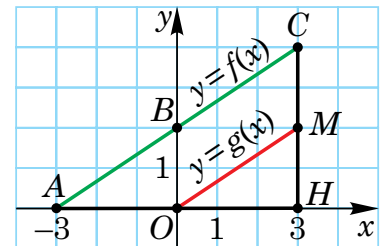
3. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функції $y = x$, $y = 2 - x^2$ (див. рисунок).



4. Обчисліть площу зафарбованої фігури, яка обмежена синусоїдою $y = \sin x$ (див. рисунок).



5. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$. Установіть відповідність між інтегралом (1–4) та багатокутником (А–Д), площа якого обчислюється заданим інтегралом.



Інтеграл

1 $S = \int_{-3}^3 f(x) dx$

2 $S = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$

3 $S = \int_0^3 f(x) dx$

4 $S = \int_0^3 g(x) dx$

Багатокутник

А трикутник OMH

Б трапеція $OBCH$

В паралелограм $OBCM$

Г трапеція $OACM$

Д трикутник ACH

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

VII. Рефлексія (2 хв)

- Я розумію, як за зображеною фігурою записати формулу обчислення площі фігури.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я знаю формулу обчислення площі криволінійної трапеції.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я знаю властивості та правила інтегрування визначених інтегралів.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію знаходити площі криволінійних трапецій.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію знаходити площі фігур, обмежених графіками функцій та осями координат.
Так Ще треба потренуватися Ні

6. Я вмію застосовувати визначені інтеграли для розв'язання практичних задач.
- Так Ще треба потренуватися Ні
7. Я можу оцінювати визначені інтеграли, використовуючи властивості нерівностей.
- Так Ще треба потренуватися Ні