

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 5. Об'єм прямої призми та об'єм похилої призми

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

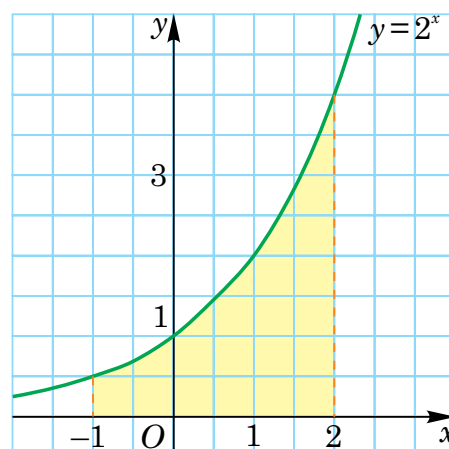
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся доводити формулу обчислення об'єму прямої призми за допомогою визначеного інтеграла;
- 2) навчитеся доводити формулу обчислення об'єму похилої призми за допомогою визначеного інтеграла;
- 3) дізнаєтесь формулу обчислення об'єму похилої призми за відомими площею перпендикулярного перерізу та довжиною бічного ребра;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

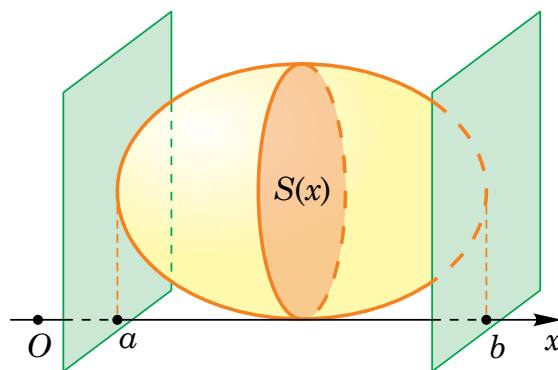
1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.
2. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.



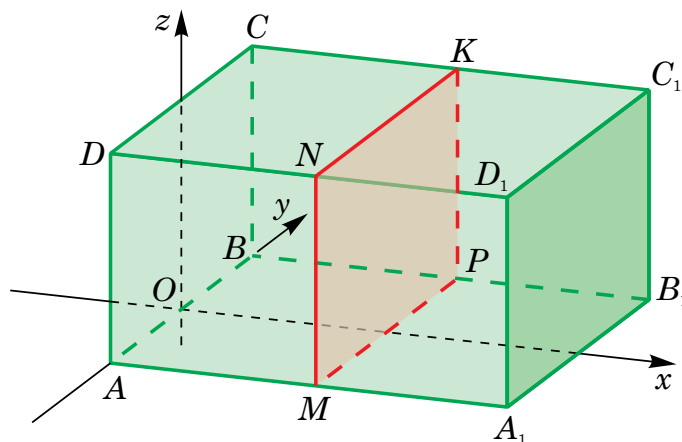
3. Обчисліть інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$.
4. Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \cos 5x$.
5. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а її бічне ребро становить $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

III. Обчислення об'єму прямої призми

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглянемо тіло Φ , об'єм якого дорівнює V . Нехай площина $x = x_0$ перетинає тіло Φ по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Φ на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$ (див. рисунок). Якщо $y = S(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, то об'єм тіла Φ можна обчислити за формулою $V = \int_a^b S(x)dx$.



Доведемо формулу об'єму прямої призми. Нехай дано пряму призму з висотою $AA_1 = h$, і основою, площа якої дорівнює S . Доведемо, що об'єм призми дорівнює $V = Sh$.



Уведемо систему координат так, щоб середина ребра AB збігалася з початком системи координат, а грань призми ABB_1A_1 належала координатній площині xu (див. рисунок). Тоді основа призми $ABCD$ лежить у площині yz , а проекцією призми на вісь абсцис є відрізок $[0; h]$. Оскільки перерізом призми площиною, перпендикулярною до осі x , є багатокутник, який дорівнює основі призми, то його площа дорівнює S .

Звідси, об'єм призми $V = \int_a^b S(x)dx = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh - S \cdot 0 = Sh$, що й треба було довести.

Приклад 1. В основі прямої призми лежить трикутник зі сторонами 8 см, 13 см і 15 см. Діагональ бічної грані, що містить меншу сторону основи, дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Побудуємо пряму призму $ABCA_1B_1C_1$ (див. рисунок).

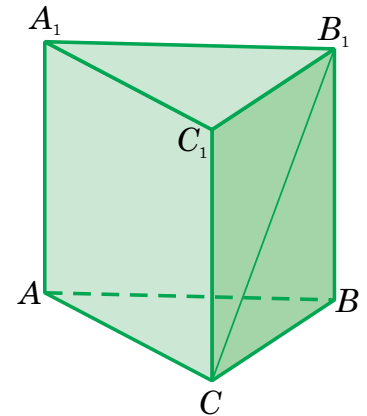
1) Півпериметр основи: $p = \frac{8+13+15}{2} = 18$ (см).

2) Площа основи: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{18 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3} = 30\sqrt{3}$ (см²).

3) Висота призми: $BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

4) Об'єм призми: $V = 30\sqrt{3} \cdot 6 = 180\sqrt{3}$ (см³).

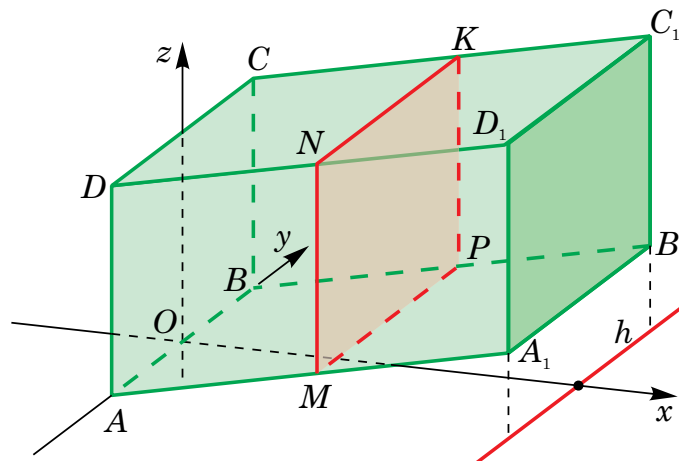
Відповідь. $180\sqrt{3}$ см³.



IV*. Обчислення об'єму похилої призми

Покажемо, як за допомогою формули $V = \int_a^b S(x)dx$ обчислити об'єм похилої призми.

Нехай дано похилу призму з висотою h і основою, площа якої дорівнює S (див. рисунок).



Доведемо, що об'єм призми дорівнює $V = Sh$.

Уведемо систему координат так, щоб середина ребра AB збігалася з початком системи координат, а грань призми $ABCD$ належала координатній площині yz (див. рисунок). Основа призми $A_1B_1C_1D_1$ належить площині, яка паралельна координатній площині yz , а проекцією призми на вісь абсцис є відрізок $[0; h]$.

Оскільки перерізом призми площиною, перпендикулярною до осі x , є багатокутник, який дорівнює основі призми, то його площа дорівнює S .

Звідси, об'єм призми $V = \int_a^b S(x)dx = \int_0^h Sdx = Sx \Big|_0^h = Sh - S \cdot 0 = Sh$, що й треба було до-

вести.

Об'єм похилої призми можна також обчислити за формулою $V = S_n \cdot l$, де S_n — площа перерізу призми площиною, яка перпендикулярна до бічних ребер призми, l — довжина бічного ребра призми.

Приклад 2. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см та гострим кутом 45° . Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — похила чотирикутна призма,

$AB = 6$ см, $AD = 3$ см, $\angle BAD = 45^\circ$,

$AA_1 = 4$ см. Об'єм похилої призми: $V = S_o \cdot H$, де S_o —

площа паралелограма $ABCD$,

$H = A_1 O$ — висота похилої призми.

Площа паралелограма $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD =$$

$$= 6 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

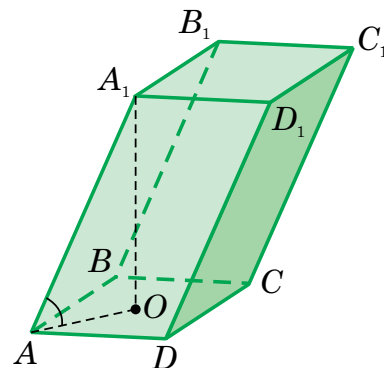
Знайдемо висоту похилої призми.

Оскільки $A_1 O \perp AO$, де AO — проекція похилої AA_1 на площину основи, то кут між бічним ребром і площиною основи $\angle A_1 A O = 30^\circ$.

Із прямокутного трикутника AOA_1 ($\angle O_1 = 90^\circ$), за властивістю катета, який лежить навпроти кута 30° , маємо: $A_1 O = AA_1 : 2 = 2$ (см).

Тоді об'єм призми: $V = 9\sqrt{2} \cdot 2 = 18\sqrt{2}$ (см³).

Відповідь. $18\sqrt{2}$ см³.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Пальне міститься в резервуарі, що має форму правильної чотирикутної призми зі стороною основи 2 м і висотою 3 м. Яку роботу потрібно виконати, щоб відкачати все пальне з резервуара через отвір у його верхній основі, якщо густина пального дорівнює 800 кг/м³?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота 5 см.
2. В основі прямої призми лежить трикутник, сторона якого дорівнює 24 см, а висота, проведена до неї, становить 10 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 4 см.
3. В основі прямої призми лежить трапеція з основами 3 см і 5 см і висотою 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
4. Знайдіть об'єм повітря у класній кімнаті, довжина якої дорівнює 8 м, ширина — 6 м, а висота кімнати дорівнює 2,5 м.

5. В основі призми лежить ромб зі стороною 5 см і гострим кутом 30° . Висота призми становить 6 см. Знайдіть об'єм призми.
6. В основі прямої призми лежить ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро призми становить 20 см. Обчисліть об'єм призми.
7. Основа прямокутного паралелепіпеда — квадрат. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його висота становить 6 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 45° .
8. Основа прямої призми — трикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 6 см. Діагональ меншої бічної грані утворює кут 45° з бічним ребром. Знайдіть об'єм призми.
9. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, діагоналі якого відносяться, як 5 : 2. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 17 дм і 10 дм. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
10. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом 60° і бічною стороною 4 см. Діагоналі трапеції є бісектрисами гострих кутів. Діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм призми.

Рівень В

1. Бічне ребро правильної шестикутної призми дорівнює H і утворює з більшою діагоналлю кут β . Знайдіть об'єм призми.
2. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 6 см. Бічне ребро дорівнює 2 см та утворює з сусідніми сторонами основи кути по 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
3. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною 13 см і медіаною, яка проведена до основи, завдовжки 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ її більшої бічної грані дорівнює 26 см.
4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник із основою 12 см і бічною стороною 10 см. Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ її найменшої бічної грані дорівнює 26 см.
5. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник ABC , в якому $AC = BC$, $AB = 6$ см, $\angle BAC = \alpha$, причому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Знайдіть об'єм призми (у см^3), якщо площа її бічної поверхні вдвічі більша за площу її основи. (Пробне ЗНО, 2012 р.).
6. Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC . Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину, паралельно ребру AB . Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 588 см^3 , а її висота становить 7 см. (ЗНО, 2012 р.).
7. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат, сторона якого дорівнює 1 м. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 2 м і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кути по 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
8. Будівельна цеглина має розміри 25 см х 12 см х 6 см. Знайдіть об'єм стіни, викладеної з 10000 цеглин. Візьміть до уваги, що розчин збільшує об'єм на 15 %.

9. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 10 см і 17 см, а одна з діагоналей основи дорівнює 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда 29 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
10. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 3,5 см, а діагональ бічної грані становить 2,5 см. Знайдіть об'єм призми.

Рівень С

1. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми утворює з бічним ребром кут β . Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R . Знайдіть об'єм призми.
2. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
3. Знайдіть об'єм шестикутної призми, якщо її більша діагональ дорівнює 8 см та утворює з площиною основи кут 60° .
4. Знайдіть об'єм шестикутної призми, якщо її бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см та утворює з більшою діагоналлю кут 60° .
5. Менша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см та утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, вершинами якої є середини сторін даної шестикутної призми, взятими через одну.
6. В основі прямої призми лежить прямокутник із кутом α між діагоналями. Діагональ призми дорівнює b та утворює з площиною основи кут β . Обчисліть об'єм призми.
7. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
8. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α . Більша діагональ трапеції дорівнює 1 м і є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою, що дорівнює a , і кутом при вершині α . Переріз, проведений через дану сторону основи і протилежну вершину другої основи, утворює з основою призми кут β . Знайдіть об'єм призми.
10. Висота прямої трикутної призми дорівнює 5 м, її об'єм становить 24 м^3 . Площі бічних граней відносяться, як $17 : 17 : 16$. Знайдіть сторони основи.

Рефлексія

1. Я вмію доводити формулу обчислення об'єму прямої призми, використовуючи визначений інтеграл.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
2. Я вмію доводити формулу обчислення об'єму похилої призми, використовуючи визначений інтеграл.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

- 3.** Я знаю формулу для обчислення об'єму похилої призми за відомим перпендикулярним перерізом і бічним ребром.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Обчислення об'єму призми в архітектурі.
- 2.** Використання формули об'єму призми в інженерних розрахунках.
- 3.** Дослідження впливу нахилу бічного ребра на об'єм призми.
- 4.** Моделювання обчислення об'єму призми за допомогою комп'ютерних програм.
- 5.** Вимірювання об'ємів призм за допомогою води та порівняння отриманих результатів із результатами, обчисленими за формулами.







