

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 6. Об'єми тіл обертання. Об'єм циліндра

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

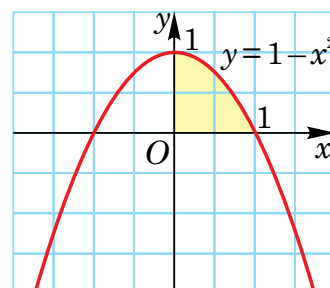
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

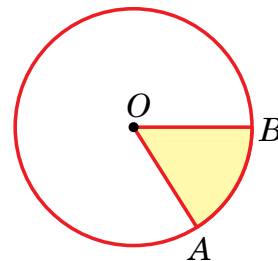
- 1) вивчите інтегральну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання;
- 2) навчитеся знаходити об'єми тіл обертання, що утворюються унаслідок обертання графіка функції $y = f(x)$ навколо осі абсцис;
- 3) навчитеся доводити формулу об'єму циліндра через інтегральну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання;
- 4) навчитеся розв'язувати задачі на обчислення об'ємів циліндрів;
- 5) удосконалите навички розв'язування практичних задач на обчислення об'ємів циліндрів.

II. Повторення

1. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а її бічне ребро становить $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм призми.
2. Укажіть первісну функції $f(x) = \cos x$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 6\right)$.
3. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.



4. На рисунку зображено коло з центром у точці O і з радіусом 3 см, $\angle AOB = 60^\circ$. Знайдіть площу заштрихованої фігури.

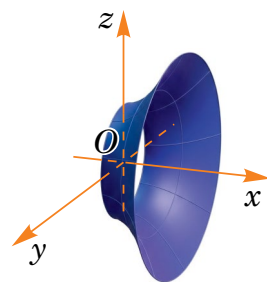


5. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.

III. Інтегральна формула для обчислення об'єму тіла обертання

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, утворюється тіло з об'ємом V ,

$$\text{то } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Приклад 1. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

$$\text{Розв'язання. } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 7,5\pi \text{ (куб. од.)}.$$

Відповідь. 7,5 куб. од.

IV. Об'єм циліндра

Розглянемо циліндр як тіло, утворене обертанням прямокутника, обмеженого прямою $f(x) = R$, де $R > 0$, $x = 0$, $x = H$, $H > 0$ та $y = 0$, навколо осі абсцис.

За формулою $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ матимемо:

$$V = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 H, \text{ тобто об'єм циліндра, радіус основи якого } R, \text{ а висо-}$$

та становить H , можна обчислити за формулою $V = \pi R^2 H$.

Приклад 2. Діаметр каструлі, що має форму циліндра, становить 44 см, а висота її дорівнює 32 см. Скільки літрів води вміщає каструля?

Розв'язання. Оскільки $D = 44 \text{ см} = 4,4 \text{ дм}$, то $R = 2,2 \text{ дм}$.

$H = 32 \text{ см} = 3,2 \text{ дм}$.

Об'єм $V = \pi R^2 H$.

$$V = 3,14 \cdot 2,2^2 \cdot 3,2 \approx 48,63 \approx 49 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

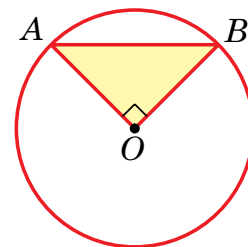
Оскільки $1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л}$, то об'єм каструлі становить близько 49 л.

Відповідь. 49 л.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Фермер, готуючись до посівної кампанії, планує закупити паливо. Паливо зберігатиметься у циліндричній цистерні, твірна якої дорівнює 5 м і є паралельною до землі. Радіус основи цієї цистерни становить 3 м. За правилами техніки безпеки, цистерну можна наповнити до рівня хорди AB , яку видно з центра основи циліндра під кутом 90° (див. рисунок). Розрахуйте максимальний об'єм пального (у м^3), яким можна безпечно заповнити цистерну. Відповідь округліть до десятих.



VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Скільки тонн нафти вміщує циліндрична цистерна з діаметром 18 м і заввишки 7 м, якщо густина нафти $\rho = 0,85 \text{ г/см}^3$?
2. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см, а висота становить 5 см.
3. Осьовий переріз циліндра — квадрат із діагоналлю 2 см. Знайдіть об'єм циліндра.
4. Радіус основи циліндра дорівнює R , а площа осьового перерізу — S . Знайдіть об'єм циліндра.
5. Знайдіть радіус основи циліндра, об'єм якого дорівнює $36\pi \text{ см}^3$, а площа бічної поверхні становить $9\pi \text{ см}^2$.
6. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a .
7. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат зі стороною 1,8 дм. Знайдіть об'єм циліндра.
8. Довжини двох круглих колод рівні, а їхні діаметри відносяться, як 2 : 3. Як відносяться їхні об'єми?
9. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який міститься на відстані d від осі циліндра та відтинає від кола основи дугу α . Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа перерізу S .
10. Площі бічних поверхонь двох циліндрів рівні. Доведіть, що їхні об'єми відносяться, як радіуси основ.

Рівень В

1. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші, ніж відро ємністю 12 л води. Чи поміститься в іграшкове відро вода зі склянки місткістю 250 мл?
2. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.

3. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи циліндра під кутом φ . Знайдіть об'єм циліндра.
4. Два циліндри утворено обертанням одного й того самого прямокутника навколо кожної з його нерівних сторін a і b . Знайдіть відношення об'ємів утворених циліндрів.
5. У скільки разів об'єм циліндра, описаного навколо правильної чотирикутної призми, більший за об'єм циліндра, вписаного в цю саму призму?
6. У циліндричну посудину, діаметр якої дорівнює 9 см, занурили деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.
7. У циліндричній посудині рівень рідини сягає 16 см. На якій висоті буде рівень рідини, якщо її перелити в іншу посудину, діаметр якої удвічі більший за першу?
8. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник із катетом a і кутом α , прилеглим до цього катета. Знайдіть об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює H .
9. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 320π см², а площа осевого перерізу становить 192 см². Знайдіть об'єм циліндра.
10. Через твірну циліндра проведено дві площини, які перетинають циліндр і кут між якими становить 120° . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см, а площі перерізів становлять по 30 см².

Рівень С

1. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра із точкою кола нижньої основи, утворює із віссю циліндра кут β . Знайдіть площу основи циліндра.
2. Через точку кола основи циліндра проведено площину під кутом β до основи. Радіус основи циліндра дорівнює R . Знайдіть об'єм частини циліндра, яку відтинає ця площина.
3. У циліндр вписано правильну трикутну призму, в яку, у свою чергу, вписано інший циліндр. Різниця площ бічних поверхонь цих циліндрів дорівнює $40\sqrt{3}\pi$ см². Знайдіть різницю об'ємів цих циліндрів, якщо сторона основи призми дорівнює 24 см.
4. Навколо правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює a , описано циліндр так, що всі вершини піраміди лежать на колах основ циліндра. Знайдіть об'єм цього циліндра.
5. Із множини циліндрів, периметри осевих перерізів яких дорівнюють $2p$, знайдіть об'єм циліндра, який має найбільшу площу бічної поверхні.
6. Площа основи циліндра дорівнює Q , а площа його осевого перерізу становить S . Знайдіть об'єм циліндра.
7. З усіх циліндрів, вписаних у сферу з радіусом r , знайдіть циліндр із найбільшим об'ємом. Чому дорівнює його об'єм?
8. Дві площини утворюють кут α і проходять через спільну твірну циліндра, радіус якого дорівнює R . Знайдіть об'єм циліндра, якщо площі перерізів, утворених площинами, дорівнюють S .

9. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює P , а кут між діагоналями перерізу, який лежить навпроти твірної, дорівнює α . Знайдіть об'єм циліндра.
10. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут β . Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.

Рефлексія

1. Я знаю інтегральну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я вмію знаходити об'єми тіл обертання, що утворюються внаслідок обертання графіка функції $y = f(x)$ навколо осі абсцис.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я знаю, як довести формулу об'єму циліндра через загальну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
4. Я вмію розв'язувати задачі на обчислення об'єму циліндра.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
5. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

Можливі теми проєктів

1. Використання формули об'єму циліндра в техніці.
2. Обчислення об'єму похилого циліндра.
3. Історія вивчення об'єму циліндра.
4. Моделювання обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою комп'ютерних програм.
5. Використання формули об'єму циліндра у фізиці для розрахунку об'єму циліндра двигуна.







