

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 6. Об'єми тіл обертання. Об'єм циліндра

План уроку

1. Інтегральна формула для обчислення об'єму тіла обертання.
2. Об'єм циліндра.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

добирає дані, потрібні для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 1.2.3-1];

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

відображає результати розв'язання проблемної ситуації в різноманітних формах, зокрема із використанням інформаційних технологій [12 МАО 2.4.1-2];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності В або С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

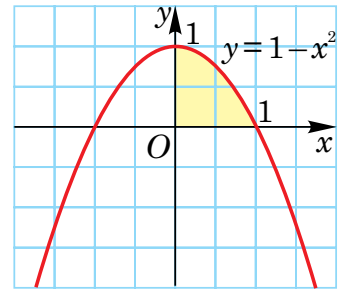
- 1) Чому банки для напоїв, батарейки або свічки мають саме циліндричну форму?
- 2) В який спосіб інженери обчислюють об'єм циліндричного бака або цистерни?
- 3) Чому при виробництві газових балонів важливо точно знати їхній об'єм?
- 4) Якщо обертати навколо деякої прямої не прямокутник, а іншу фігуру, то чи відрізнятиметься принцип обчислення об'ємів утворених тіл обертання від обчислення об'єму циліндра?
- 5) Чому у пральних машинах барабан має форму циліндра?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а її бічне ребро становить $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм призми.
Відповідь. 24 см^3 .
2. Укажіть первісну функції $f(x) = \cos x$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 6\right)$.
Відповідь. $F(x) = \sin x + 5$.

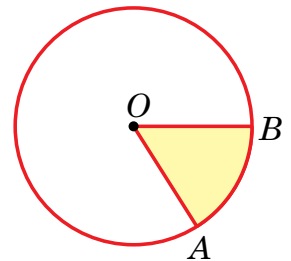
3. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.

Відповідь. $\frac{2}{3}$ кв. од.



4. На рисунку зображено коло з центром у точці O і з радіусом 3 см, $\angle AOB = 60^\circ$. Знайдіть площу заштрихованої фігури.

Відповідь. $\frac{3}{2}$ см².

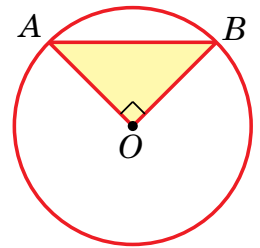


5. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.

Відповідь. 900 см².

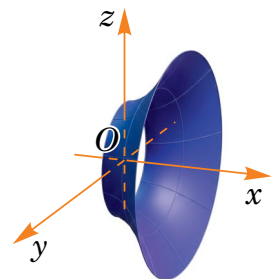
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Фермер, готуючись до посівної кампанії, планує закупити паливо. Паливо зберігатиметься у циліндричній цистерні, твірна якої дорівнює 5 м і є паралельною до землі. Радіус основи цієї цистерни становить 3 м. За правилами техніки безпеки, цистерну можна наповнити до рівня хорди AB , яку видно з центра основи циліндра під кутом 90° (див. рисунок). Розрахуйте максимальний об'єм пального (у м³), яким можна безпечно заповнити цистерну. Відповідь округліть до десятих.



III. Інтегральна формула для обчислення об'єму тіла обертання (3–5 хв)

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, утворюється тіло з об'ємом V , то $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.



Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Розв'язання. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 7,5\pi$ (куб. од.).

Відповідь. 7,5 куб. од.

7. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = x$.

Розв'язання. $V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{2} - \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$ (куб. од.).

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$ куб. од.

IV. Об'єм циліндра (3 хв)

Розглянемо циліндр як тіло, утворене обертанням прямокутника, обмеженого прямою $f(x) = R$, де $R > 0$, $x = 0$, $x = H$, $H > 0$ та $y = 0$, навколо осі абсцис.

За формулою $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ матимемо:

$$V = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 H, \text{ тобто об'єм циліндра, радіус основи якого } R, \text{ а висо-}$$

та становить H , можна обчислити за формулою $V = \pi R^2 H$.

Ілюстративні приклади (10–12 хв)

8. Діаметр каструлі, що має форму циліндра, становить 44 см, а висота її дорівнює 32 см. Скільки літрів води вміщає каструля?

Розв'язання. Оскільки $D = 44$ см = 4,4 дм, то $R = 2,2$ дм.

$H = 32$ см = 3,2 дм.

Об'єм $V = \pi R^2 H$.

$$V = 3,14 \cdot 2,2^2 \cdot 3,2 \approx 48,63 \approx 49 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Оскільки $1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л}$, то об'єм каструлі становить близько 49 л.

Відповідь. 49 л.

9. Скільки меду можна вмістити в посудину, що має циліндричну форму з діаметром основи 22 см і висотою 46 см, якщо густина меду 1350 кг/м^3 ?

Розв'язання. Оскільки $D = 22$ см = 0,22 м, то $R = 0,11$ м, $H = 46$ см = 0,46 м.

Об'єм $V = \pi R^2 H$, а маса $m = V \cdot \rho$.

$$\text{Тоді } m = 3,14 \cdot 0,11^2 \cdot 0,46 \cdot 1350 \approx 23,59 \approx 23,6 \text{ (кг)}.$$

Відповідь. 23,6 кг.

10. На виробництві потрібно виготовити циліндричну металеву рейку довжиною 2 м і діаметром 10 см. Скільки матеріалу необхідно для виготовлення рейки, якщо при переплавці втрачається 10 % матеріалу?

Розв'язання. Оскільки $D = 10$ см = 0,1 м, то $R = 0,05$ м, $H = 2$ м.

$$\text{Об'єм } V = \pi R^2 H, V = \pi \cdot 0,05^2 \cdot 2 = 3,14 \cdot 0,0025 \cdot 2 \approx 0,0157 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Збільшимо кількість матеріалу на 10%: $0,0157 \cdot 0,1 \approx 0,00157 \text{ (м}^3\text{)}.$

Отже, $0,0157 + 0,00157 = 0,01727 \text{ (м}^3\text{)}.$

Відповідь. $0,01727 \text{ м}^3$.

- 11.** Діаметр зовнішнього корпусу котла циліндричної форми для харчових продуктів дорівнює 1 м, а діаметр внутрішнього циліндра котла становить 80 см. Висота котла дорівнює 1 м 20 см. Знайдіть об'єм пароводяної сорочки котла.

Розв'язання. Оскільки $D = 1$ м, то $R = 0,5$ м. Нехай $d = 0,8$ м, $r = 0,4$ м, $H = 1,2$ м.
 $V_{\text{пар.сор.}} = V_{\text{зовн.цил.}} - V_{\text{вн.цил.}} = 3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 1,2 - 3,14 \cdot 0,4^2 \cdot 1,2 = 3,14 \cdot 1,2 \cdot (0,5^2 - 0,4^2) = 0,339 \text{ (м}^3\text{)} \approx 0,34 \text{ м}^3$.

Відповідь. $0,34 \text{ м}^3$.

- 12.** Об'єм циліндра дорівнює V , а площа осевого перерізу становить S . Знайдіть площу основи циліндра.

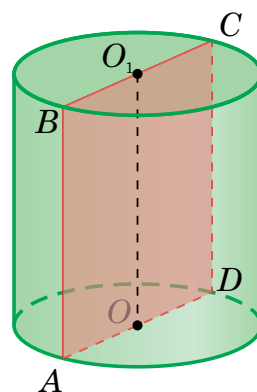
Розв'язання. Нехай дано циліндр із віссю OO_1 (див. рисунок), його об'єм, за умовою, дорівнює V .

$ABCD$ — осевий переріз циліндра, його площа, за умовою, дорівнює S . Як відомо, осевий переріз циліндра — прямокутник. Тоді $S = AD \cdot AB = 2R \cdot H$, де R — радіус основи циліндра, H — висота циліндра. Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$.

Оскільки $RH = \frac{S}{2}$, то $V = \pi R \cdot \frac{S}{2}$. Тоді $R = \frac{2V}{\pi S}$, і площа основи

циліндра: $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \frac{4\pi V^2}{\pi^2 S^2} = \frac{4V^2}{\pi S^2}$.

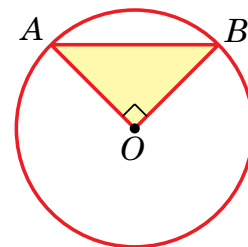
Відповідь. $\frac{4V^2}{\pi S^2}$.



V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Фермер, готуючись до посівної кампанії, планує закупити паливо. Паливо зберігатиметься у циліндричній цистерні, твірна якої дорівнює 5 м і є паралельною до землі. Радіус основи цієї цистерни становить 3 м. За правилами техніки безпеки, цистерну можна наповнити до рівня хорди AB , яку видно з центра основи циліндра під кутом 90° (див. рисунок). Розрахуйте максимальний об'єм пального (у м^3), яким можна безпечно заповнити цистерну. Відповідь округліть до десятих.



Розв'язання. 1) Знайдемо об'єм усієї цистерни: $V_{\text{ц}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 \approx 141,3 \text{ (м}^3\text{)}$.

2) Оскільки сектор, який стягується хордою AB і $\angle AOB = 90^\circ$, становить четверту частину від круга, то віднімемо від об'єму циліндра четверту частину від його об'єму:

$V_{\text{у}} - 0,25V_{\text{ц}} = 141,3 - 0,25 \cdot 141,3 = 105,975 \approx 106 \text{ (м}^3\text{)}$.

$0,75 \cdot V_{\text{ц}} \approx 106 \text{ м}^3$.

3) Додамо до отриманої різниці об'єм призми, в основі якої лежить трикутник AOB з висотою 5 м: $106 + 0,5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 128,5 \text{ (м}^3\text{)}$.

Відповідь. $128,5 \text{ м}^3$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Скільки тонн нафти вміщує циліндрична цистерна з діаметром 18 м і заввишки 7 м, якщо густина нафти $\rho = 0,85 \text{ г/см}^3$?
2. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см, а висота становить 5 см.
3. Осьовий переріз циліндра — квадрат із діагоналлю 2 см. Знайдіть об'єм циліндра.
4. Радіус основи циліндра дорівнює R , а площа осьового перерізу — S . Знайдіть об'єм циліндра.
5. Знайдіть радіус основи циліндра, об'єм якого дорівнює $36\pi \text{ см}^3$, а площа бічної поверхні становить $9\pi \text{ см}^2$.
6. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a .
7. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат зі стороною 1,8 дм. Знайдіть об'єм циліндра.
8. Довжини двох круглих колод рівні, а їхні діаметри відносяться, як 2 : 3. Як відносяться їхні об'єми?
9. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який міститься на відстані d від осі циліндра та відтинає від кола основи дугу α . Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа перерізу S .
10. Площі бічних поверхонь двох циліндрів рівні. Доведіть, що їхні об'єми відносяться, як радіуси основ.

Рівень В

1. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші, ніж відро ємністю 12 л води. Чи поміститься в іграшкове відро вода зі склянки місткістю 250 мл?
2. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи циліндра під кутом φ . Знайдіть об'єм циліндра.
4. Два циліндри утворено обертанням одного й того самого прямокутника навколо кожної з його нерівних сторін a і b . Знайдіть відношення об'ємів утворених циліндрів.
5. У скільки разів об'єм циліндра, описаного навколо правильної чотирикутної призми, більший за об'єм циліндра, вписаного в цю саму призму?
6. У циліндричну посудину, діаметр якої дорівнює 9 см, занурили деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.
7. У циліндричній посудині рівень рідини сягає 16 см. На якій висоті буде рівень рідини, якщо її перелити в іншу посудину, діаметр якої удвічі більший за першу?
8. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник із катетом a і кутом α , прилеглим до цього катета. Знайдіть об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює H .

9. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 320π см², а площа осевого перерізу становить 192 см². Знайдіть об'єм циліндра.
10. Через твірну циліндра проведено дві площини, які перетинають циліндр і кут між якими становить 120° . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см, а площі перерізів становлять по 30 см².

Рівень С

1. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра із точкою кола нижньої основи, утворює із віссю циліндра кут β . Знайдіть площу основи циліндра.
2. Через точку кола основи циліндра проведено площину під кутом β до основи. Радіус основи циліндра дорівнює R . Знайдіть об'єм частини циліндра, яку відтинає ця площина.
3. У циліндр вписано правильну трикутну призму, в яку, у свою чергу, вписано інший циліндр. Різниця площ бічних поверхонь цих циліндрів дорівнює $40\sqrt{3}\pi$ см². Знайдіть різницю об'ємів цих циліндрів, якщо сторона основи призми дорівнює 24 см.
4. Навколо правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює a , описано циліндр так, що всі вершини піраміди лежать на колах основ циліндра. Знайдіть об'єм цього циліндра.
5. Із множини циліндрів, периметри осевих перерізів яких дорівнюють $2p$, знайдіть об'єм циліндра, який має найбільшу площу бічної поверхні.
6. Площа основи циліндра дорівнює Q , а площа його осевого перерізу становить S . Знайдіть об'єм циліндра.
7. З усіх циліндрів, вписаних у сферу з радіусом r , знайдіть циліндр із найбільшим об'ємом. Чому дорівнює його об'єм?
8. Дві площини утворюють кут α і проходять через спільну твірну циліндра, радіус якого дорівнює R . Знайдіть об'єм циліндра, якщо площі перерізів, утворених площинами, дорівнюють S .
9. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює P , а кут між діагоналями перерізу, який лежить навпроти твірної, дорівнює α . Знайдіть об'єм циліндра.
10. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут β . Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.

VII. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю інтегральну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
2. Я вмію знаходити об'єми тіл обертання, що утворюються внаслідок обертання графіка функції $y = f(x)$ навколо осі абсцис.

Так
Ще треба потренуватися
Ні

- 3.** Я знаю, як довести формулу об'єму циліндра через загальну формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 4.** Я вмію розв'язувати задачі на обчислення об'єму циліндра.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Використання формули об'єму циліндра в техніці.
- 2.** Обчислення об'єму похилого циліндра.
- 3.** Історія вивчення об'єму циліндра.
- 4.** Моделювання обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою комп'ютерних програм.
- 5.** Використання формули об'єму циліндра у фізиці для розрахунку об'єму циліндра двигуна.