

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 7. Об'єм піраміди. Об'єм конуса

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

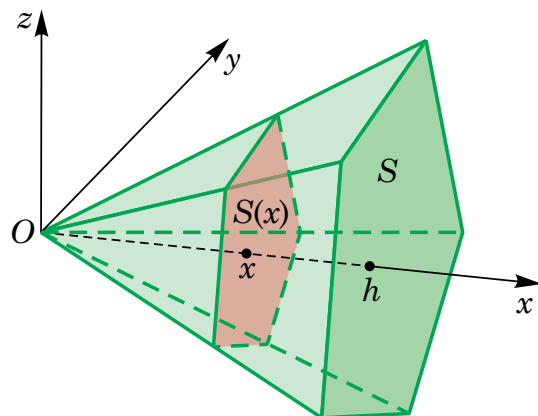
- 1) дізнаєтесь, як доводити формулу для обчислення об'єму піраміди;
- 2) навчитеся розв'язувати задачі на знаходження об'ємів пірамід;
- 3) вивчите доведення формули для обчислення об'єму конуса;
- 4) навчитеся розв'язувати задані на обчислення об'єму конуса;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = e^{-7x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.
2. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює 9 см, а твірна становить 16 см.
3. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.
4. Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 20 см, а висота становить 9 см.

III. Об'єм піраміди

Нехай дано піраміду, площа основи якої дорівнює S , а висота становить h . Візьмемо вершину піраміди за початок системи координат, а вісь x направимо перпендикулярно до площини основи (див. рисунок). Кожна січна площина, перпендикулярна до осі абсцис, внаслідок гомотетії, перетинає піраміду по багатокутнику, який подібний основі піраміди.



Нехай площа перерізу піраміди площиною, перпендикулярною до осі абсцис, яка проходить через точку x , дорівнює $S(x)$.

За властивістю гомотетії: $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, звідки $S(x) = \frac{Sx^2}{h^2}$.

Об'єм піраміди дорівнює інтегральній сумі площ перерізів, перпендикулярних до осі абсцис, тобто $V = \int_0^h S(x)dx$.

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2} dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3} Sh.$$

Таким чином, об'єм піраміди можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3} Sh$, де S — площа основи піраміди, h — висота піраміди.

Приклад 1. Основа піраміди — прямокутний трикутник, один із кутів якого дорівнює 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

Розв'язання. Нехай в основі піраміди $SABC$ (див. рисунок) лежить прямокутний трикутник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$.

Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° , тоді основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди, а оскільки трикутник ABC — прямокутний, то точка O — середина гіпотенузи AB .

$SO \perp (ABC)$, тоді AO — проекція AS на площину основи, і кут SAO — кут нахилу ребра AS до площини основи, $\angle SAO = 45^\circ$, $SO = 5$ см.

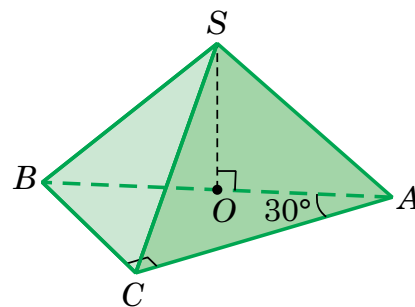
Із трикутника SOA ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $AO = SO \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = 5$ (см), отже, $AB = 10$ см.

Із трикутника ACB ($\angle C = 90^\circ$) отримаємо: $AC = AB \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (см).

Тоді $S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3}$ (см²).

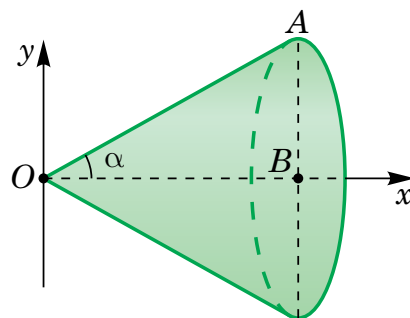
Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{125\sqrt{3}}{6}$ (см³).

Відповідь. $\frac{125\sqrt{3}}{6}$ см³.



IV. Об'єм конуса

Помістимо вершину конуса в початок системи координат — точку O (див. рисунок). Прямокутний трикутник OBA обертається навколо осі Ox . Рівняння твірної OA має вигляд: $y = kx$. $OB = h$, $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}$.



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Таким чином, об'єм конуса можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, де R — радіус основи конуса, h — висота конуса.

Приклад 2. Відра, які зазвичай використовують під час гасіння пожежі, мають конічну форму. Скільки літрів води вміщує таке відро, якщо його висота дорівнює 0,5 м, а діаметр основи становить 0,3 м? 1 літр води займає об'єм 1000 см³.

Розв'язання. Знайдемо радіус основи конуса, форму якого має відро для гасіння пожежі: $R = 0,3 : 2 = 0,15$ (м).

Оскільки $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, то $V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,15^2 \cdot 0,5 \approx 0,0118$ (м³) = 11800 см³.

Оскільки в 1000 см³ міститься 1 літр води, то відро з об'ємом 11800 см³ вміщує 11,8 літрів води.

Відповідь. 11,8 л.

Історична довідка

Формулу для обчислення об'ємів багатогранників і тіл обертання запропонував англійський математик Томас Сімпсон (1710–1761 рр.). Він спочатку працював ткачем і шкільним учителем у Дербі, а потім — професором математики у військовій академії у Вульвичі у галузі наближеного інтегрування. Низку робіт присвятив елементарній геометрії, математичному аналізу, теорії ймовірності. Відома в математиці формула Сімпсона є універсальною для обчислення об'єму геометричного тіла. Вона має вигляд: $V = \frac{H}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$, де H — висота тіла, S_1 — площа нижньої основи, S_2 — площа середнього перерізу, S_3 — площа верхньої основи.

V. Розв'язування практичної задачі

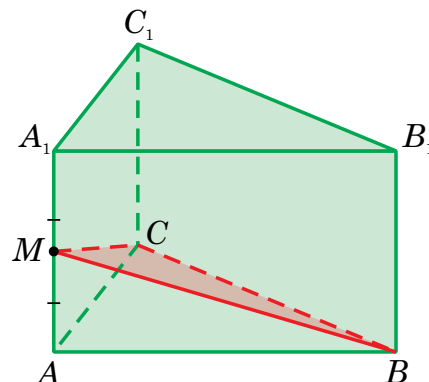
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Картоплю насипали в купу конічної форми. Довжина кола основи купи 12 м, твірна становить 3 м. Скільки тонн картоплі міститься в купі? Маса 1 м³ картоплі становить 800 кг.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Від прямої призми переріз відтинає піраміду ($AM = MA_1$), об'єм якої дорівнює V (див. рисунок). Знайдіть об'єм призми.



2. Площа основи піраміди дорівнює 12 см^2 , а висота піраміди становить 6 см. Обчисліть об'єм піраміди.
3. Об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 м, становить $36\sqrt{3} \text{ м}^3$. Знайдіть висоту піраміди.
4. Чому дорівнює об'єм піраміди, в основі якої лежить квадрат із діагоналлю 6 см, а висота піраміди дорівнює 5 см?
5. У конус вписано піраміду. Чому дорівнює висота конуса, якщо висота піраміди дорівнює 5 см?
6. Висота конуса дорівнює 6 см, а його твірна становить 10 см. Знайдіть об'єм конуса.
7. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник із гіпотенузою 12 см. Знайдіть об'єм конуса.
8. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник із катетом, який дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм конуса.
9. Прямокутний трикутник із гіпотенузою 5 см і катетом 4 см обертається навколо цього катета. Знайдіть об'єм тіла обертання.
10. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Чому дорівнюють висота і площа основи конуса?

Рівень В

1. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою 8 см і бічною стороною, яка дорівнює 6 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 9 см. Знайдіть об'єм піраміди.
2. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3} \text{ см}$, а висота її основи становить $4\sqrt{3} \text{ см}$. Обчисліть об'єм піраміди.
3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, — 4 см. Основою висоти піраміди є вершина цього трикутника. Більше бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть об'єм піраміди.
4. Основою піраміди є ромб, площа якого дорівнює 600 см^2 , а його сторона становить 25 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють 15 см. Обчисліть об'єм піраміди.

5. Підприємство одержало замовлення на виготовлення п'ятдесяти стовпчиків у формі правильної чотирикутної піраміди для огорожі місця, де ведуться дорожні роботи. Відомо, що висота цих стовпчиків має дорівнювати 0,5 м, сторона основи — 0,3 м. Скільки кілограмів матеріалу для виготовлення стовпчиків необхідно закупити підприємству, якщо 1 м^3 такого матеріалу має масу 2700 кг?
6. Площа осьового перерізу конуса дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут 30° .
7. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює 2α , а твірна конуса — l .
8. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює α , довжина сторони основи становить a . Знайдіть об'єм конуса.
9. Рідину, що міститься у склянці діаметром 8 см і висотою 9 см, переливають у посудину конічної форми з діаметром 10 см і висотою 15 см. Чи поміститься рідина у цій посудині?
10. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони довжиною 14 см. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Рівень С

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм піраміди.
2. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом α при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
3. Основою піраміди є ромб зі стороною a і кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.
4. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 3 см і 5 см, а бічна сторона дорівнює 7 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Більше бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.
5. Основою піраміди є прямокутний трикутник із гострим кутом α . Бічне ребро, яке проходить через вершину другого гострого кута основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює h , а бічна грань, яка містить катет, прилеглий до кута α , нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
6. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P , а кут між твірними осьового перерізу становить α . Знайдіть об'єм конуса.
7. Рівнобічна трапеція з основами $2\sqrt{3} \text{ см}$ і $8\sqrt{3} \text{ см}$ і кутом 60° обертається навколо своєї осі симетрії. Знайдіть об'єм тіла обертання.
8. Рівнобедрений трикутник, кут при вершині якого дорівнює β , а бічна сторона становить m , обертається навколо осі, що містить бічну сторону. Знайдіть об'єм тіла обертання.
9. Вершиною конуса є центр верхньої грані куба, а його основою — круг, уписаний у нижню основу. Об'єм конуса дорівнює V . Знайдіть об'єм куба.

- 10.** Об'єм конуса дорівнює V . Через середину висоти проведено площину, паралельну основі конуса. Чому дорівнює об'єм утвореного зрізаного конуса?

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію.
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Експериментальна перевірка формул об'єму піраміди та об'єму конуса за допомогою піску або води.
- 2.** Доведення формул об'ємів зрізаної піраміди та зрізаного конуса.
- 3.** Історія виникнення формули об'єму піраміди. Формула Сімпсона.
- 4.** Об'єм піраміди та конуса як граничний перехід при переході від багатогранників до тіл обертання.
- 5.** Застосування формул об'єму піраміди та об'єму конуса у повсякденному житті.







