

Інтеграл та його застосування. Площі поверхонь та об'єми тіл

Урок 8. Об'єм кулі та її частин

План уроку

1. Об'єм кулі.
2. Кульовий сегмент і кульовий шар. Обчислення об'ємів кульового сегмента та кульового шару.
3. Кульовий сектор. Обчислення об'єму кульового сектора.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

подає дані та зв'язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2-3];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання комплексних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови, використовуючи статистичні дані, зокрема економічного характеру [12 МАО 2.2.2-1];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1];

самостійно та у співпраці з іншими оцінює різні моделі й шляхи розв'язання комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1-1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1];

читає та розуміє тексти математичного змісту, поповнюючи свій словниковий запас математичними термінами, зокрема іншомовного походження [12 МАО 4.3.1-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.

- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівень В або рівень С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи потрібно інженерам-технологам знати формулу об'єму кулі при виготовленні підшипників?
- 2) Чи потрібно знати формулу об'єму кулі будівельникам?
- 3) Чи користуються формулою об'єму кулі астрономи, коли визначають масу небесних тіл?
- 4) У скільки разів збільшиться об'єм кулі, якщо її радіус подвоїти?
- 5) Де у повсякденному житті можна побачити кулеподібні об'єкти? Чи потрібно вміти знаходити їхні об'єми?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Квадрат вписано в коло, радіус якого дорівнює R . Чому дорівнює площа квадрата?
Відповідь. $2R^2$.
2. Обчисліть інтеграл $\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
Відповідь. 1.

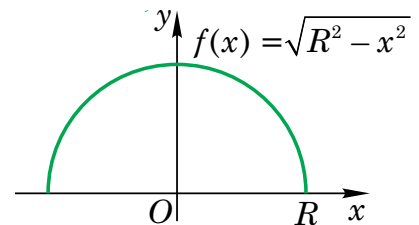
3. Чому дорівнює радіус сфери, площа поверхні якої становить 100π см²?
Відповідь. 5 см.
4. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 14 см, а радіус основи становить 4 см.
Відповідь. 112π см².
5. Кут між твірною і площиною основи конуса дорівнює 60° , висота конуса становить $9\sqrt{3}$ см. Знайдіть твірну конуса.
Відповідь. 18 см.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За задумом архітектора вхід до палацу молоді мають прикрашати дві кулі з діаметрами 0,8 м, які розміщено по обидва боки від сходів. Ці кулі виготовляють із природного каменю, густина якого дорівнює $4,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Чи можна обидві виготовлені у майстерні кулі доставити до палацу однією вантажівкою, вантажність якої дорівнює 3 т? (С. П. Бабенко, Геометрія 11 клас. Усі уроки геометрії).

III. Об'єм кулі (5 хв)

Для знаходження об'єму кулі обертаємо півколо з радіусом R , центр якого збігається з початком системи координат, навколо осі абсцис. Як відомо, таке півколо можна задати функцією $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.



Таким чином, формулу об'єму кулі можна довести із загальної формули для тіл обертання: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Отже, об'єм кулі, радіус якої дорівнює R , обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Що доцільніше: купити кавун, що має радіус 30 см, або три кавуни, що мають радіуси по 10 см?

Розв'язання. Об'єм кавуна обчислимо за формулою об'єму кулі: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Об'єм більшого кавуна: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 30^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 27000 = 36000\pi$ (см³).

Об'єм трьох менших кавунів: $V = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = 4 \cdot \pi \cdot 1000 = 4000\pi$ (см³).

Отже, доцільніше купити кавун, радіус якого дорівнює 30 см.

Відповідь. Кавун, радіус якого становить 30 см.

7. Знайдіть діаметр чавунної кулі масою 1 кг, якщо густина ρ чавуну дорівнює 7 г/см³.

Розв'язання. Об'єм кулі обчислимо за формулою $V = \frac{m}{\rho}$: $V = \frac{1000}{7}$ см³.

Оскільки об'єм кулі $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, де R — радіус кулі, то $\frac{1000}{7} = \frac{4}{3} \pi R^3$,

$$R^3 = \frac{750}{7\pi} \approx 34, \text{ звідси } R \approx 3,24 \text{ см.}$$

Тоді діаметр кулі $D = 6,48$ см.

Відповідь. 6,48 см.

8. Усередині кулі проведені дві паралельні площини по один бік від центра кулі, на відстані 3 см одна від одної. Ці площини мають у перерізі два малих круги, радіуси яких 9 см і 12 см. Обчисліть об'єм кулі.

Розв'язання. Нехай R — радіус кулі, O_1 і O_2 — центри кругів, що утворюються при перетині даних паралельних площин з кулею (див. рисунок).

Нехай $OO_2 = x$. Виразимо квадрати радіуса кулі, як гіпотенузи прямокутних трикутників AO_1O і DO_2O і прирівняємо їх:

$$12^2 + x^2 = 9^2 + (3 + x)^2, \quad 144 + x^2 = 81 + 9 + 6x + x^2,$$

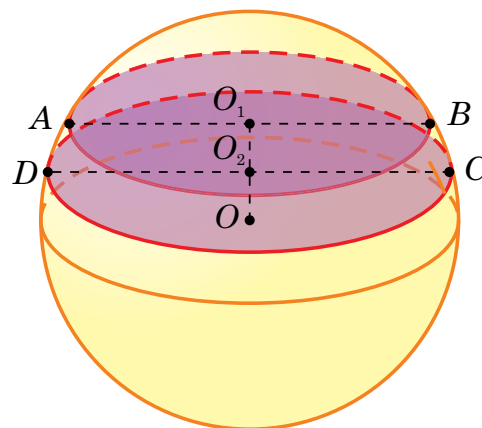
$$6x = 54, \quad x = 9.$$

Знайдемо радіус кулі

$$R = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ (см)}.$$

$$\text{Об'єм кулі } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 15^3 = 4500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

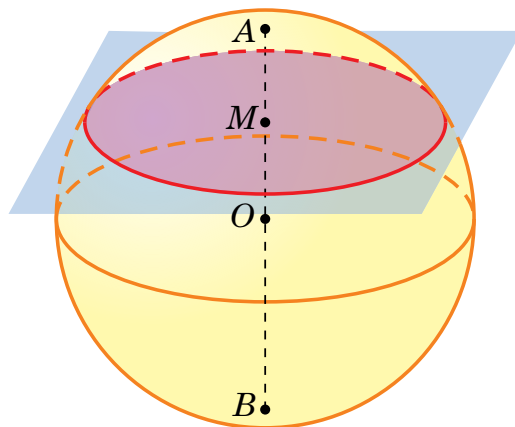
Відповідь. 4500π см³.



IV. Кульовий сегмент і кульовий шар. Обчислення об'ємів кульового сегмента та кульового шару (5 хв)

Розглянемо кулю з центром O . Проведемо її діаметр AB . Нехай M — внутрішня точка відрізка AB . Проведемо через точку M площину перпендикулярно до діаметра AB . Ця площина ділить кулю на два тіла, кожне з яких називають **кульовим сегментом** (див. рисунок).

Круг, що утворився в результаті перерізу кулі площиною, називають основою кожного з двох сегментів. Довжини відрізків AM і BM називають висотами сегментів, а точки A і B — їхніми вершинами.



Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ на проміжку $[r-h; r]$.

Її графіком є дуга кола (див. рисунок).

При обертанні фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, прямими $x = r-h$, $x = r$ та $y = 0$, навколо осі абсцис, отримаємо кульовий сегмент із висотою h .

Обчислимо його об'єм:

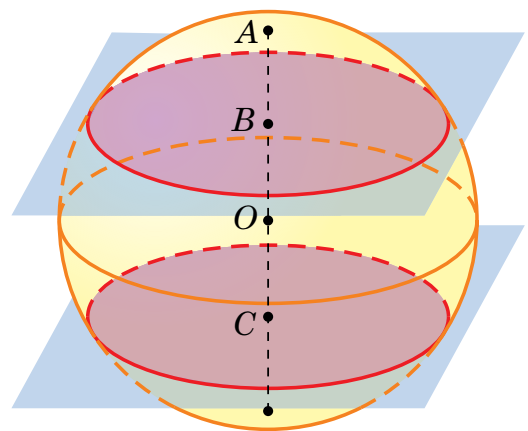
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{r-h}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3} \right).$$

Після перетворень отримаємо формулу для обчислення об'єму кульового сегмента:

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$

Перетнемо кулю двома паралельними площинами. Частину кулі, що міститься між цими площинами, називають **кульовим шаром** (див. рисунок).

Об'єм кульового шару можна знайти як різницю об'ємів двох кульових сегментів. Наприклад, об'єм кульового шару на рисунку дорівнює різниці об'ємів кульових сегментів з висотами AC і AB .



Ілюстративний приклад (4-5 хв)

9. У півкулі, радіус якої дорівнює R , через середину її висоти проведено переріз паралельно основі півкулі. Знайдіть об'єми утвореного сегмента і кульового шару.

Розв'язання. Нехай дано півкулю, радіус якої $OA = R$, точка B — середина OA . Зобразимо дану півкулю в розрізі (див. рисунок).

Висота сегмента $AB = H = \frac{R}{2}$.

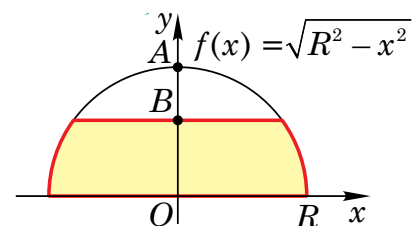
За формулою, $V_c = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$,

$$V_c = \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \left(R - \frac{R}{6} \right) = \pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{5R}{6} = \frac{5\pi}{24} R^3.$$

Об'єм кульового шару знайдемо як різницю об'єму півкулі і об'єму сегмента:

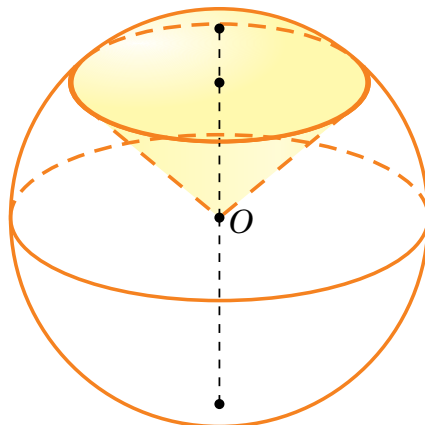
$$V_{\text{ш}} = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{5}{24} \pi R^3 = \frac{16}{24} \pi R^3 - \frac{5}{24} \pi R^3 = \frac{11}{24} \pi R^3.$$

Відповідь. $\frac{5\pi}{24} R^3$; $\frac{11}{24} \pi R^3$.



V. Кульовий сектор. Обчислення об'єму кульового сектора (5 хв)

Розглянемо конус із вершиною в центрі кулі та твірною, що дорівнює радіусу кулі (див. рисунок). Основа цього конуса ділить кулю на два кульових сегменти. Розглянемо сегмент, вершина якого та центр кулі розташовані по різні боки від площини, що містить основу конуса. Об'єднання цього сегмента й конуса називають **кульовим сектором**.



Нехай кульовий сегмент має висоту h , тоді висота конуса дорівнюватиме $R - h$, де R — радіус кулі. Радіус основи конуса знайдемо за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Об'єм конуса:

$$V_k = \frac{1}{3} \pi (2Rh - h^2)(R - h) = \frac{1}{3} \pi (2R^2h - 2Rh^2 - Rh^2 + h^3) = \frac{1}{3} \pi h (2R^2 - 3Rh + h^2).$$

Об'єм сегмента: $V_c = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$

Об'єм кульового сектора:

$$\begin{aligned} V &= V_k + V_c = \frac{1}{3} \pi h (2R^2 - 3Rh + h^2) + \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3} \pi h^3 + \pi R h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3 = \\ &= \frac{2}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Таким чином, об'єм кульового сектора можна обчислити за формулою:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

- 10.** Радіус кулі дорівнює R . Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює 120° . Знайдіть об'єм кульового сектора.

Розв'язання. Виконаємо побудову (див. рисунок).

За умовою, $\angle COD = 120^\circ$, $H = AB$, $R = OA = OC = OD$, $AB = AO - OB$.

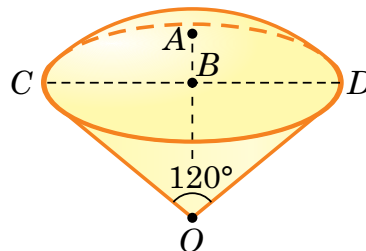
Трикутник COD — рівнобедрений, BO — бісектриса кута COD .

Трикутник BOD — прямокутний, $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle COD = 60^\circ$.

Тоді $\angle ODB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

За властивістю прямокутного трикутника з гострим кутом 30° : $BO = \frac{1}{2} OD = \frac{1}{2} R$.

Тоді, $H = AB = AO - BO = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$.



Об'єм кульового сектора обчислюється за формулою $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, тобто

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi}{3} R^3.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} R^3$.

- 11.** Визначте об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі становить 75 см.

Розв'язання. Нехай O — центр кулі, OA — вісь меншого кульового сектора, C — центр кола основи сектора, CB — радіус цього кола, $CB = 60$ см, $OA = OB = 75$ см (див. рисунок).

Об'єм кульового сектора дорівнює: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, де

$R = OA$, $h = CA$.

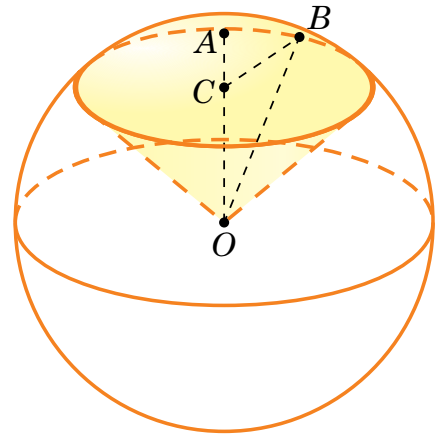
З трикутника OCB ($\angle C = 90^\circ$):

$$OC = \sqrt{OB^2 - CB^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45 \text{ (см)}.$$

$$CA = OA - OC = 75 - 45 = 30 \text{ (см)}.$$

$$\text{Тоді } V = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $112500\pi \text{ см}^3$.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За задумом архітектора вхід до палацу молоді мають прикрашати дві кулі з діаметрами 0,8 м, які розміщено по обидва боки від сходів. Ці кулі виготовляють із природного каменю, густина якого дорівнює $4,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Чи можна обидві виготовлені у майстерні кулі доставити до палацу однією вантажівкою, вантажність якої дорівнює 3 т? (С. П. Бабенко, Геометрія 11 клас. Усі уроки геометрії).

Розв'язання. Радіус кулі дорівнює 0,4 м. За формулою, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — обчислимо

$$\text{об'єм кожної кулі: } V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,4^3 \approx 0,268 \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$\text{Знайдемо масу кожної кулі: } 0,268 \cdot 4,5 \cdot 10^3 = 1206 \text{ (кг)}.$$

$$\text{Тоді маса двох таких куль дорівнює } 1206 \cdot 2 = 2412 \text{ (кг)}.$$

Тобто обидві кулі можна перевезти однією вантажівкою зазначеної вантажності.

Відповідь. Так.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм кулі.
2. Із кулі, діаметр якої дорівнює 20 см, виготовляють кульки з діаметром у 10 разів меншим. Скільки таких кульок можна виготовити?
3. Об'єм однієї кулі у 8 разів більший за об'єм другої кулі. У скільки разів радіус першої кулі більший за радіус другої кулі?
4. Із циліндра, осьовий переріз якого — квадрат зі стороною 10 см, виплавили кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.
5. Діаметр одного кавуна вдвічі більший за діаметр іншого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?
6. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі з радіусом r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r , учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший за об'єм конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?
7. Знайдіть об'єм кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 4 см, а висота кульового сегмента становить 3 см.
8. Площина розбиває кулю на два сегменти, радіус кола основи яких дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм меншого кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 10 см.
9. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо радіус кулі дорівнює 4 см, а висота відповідного кульового сегмента становить 6 см.
10. Зі свинцевої кулі з радіусом 10 мм виготовили циліндричний диск завтовшки 3 мм. Який діаметр диска?

Рівень В

1. Радіуси трьох куль дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює сумі об'ємів указаних куль.
2. Модель кулі з діаметром 12 см і модель куба з ребром 10 см виготовлено з одного й того самого матеріалу. Маса якої фігури менша?
3. Свинцеву кулю з радіусом 6 см переплавили у циліндр, діаметр основи якого дорівнює 12 см. Знайдіть висоту циліндра.
4. Маса металевої кулі дорівнює 37 г, діаметр кулі — 2 см. Обчисліть густину металу.
5. Яке тіло має більший об'єм: куля з радіусом 1 см чи правильна трикутна призма, кожне ребро якої дорівнює 2 см?
6. Переріз кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань 2 см, має площу 12π см². Знайдіть об'єм кулі.
7. Латунну кулю з діаметром 8 см переплавили в конус, радіус основи якого дорівнює 4 см. Знайдіть висоту конуса.
8. Площина ділить кулю на два кульових сегменти, об'єми яких становлять 252π см³ і 720π см³. Знайдіть висоту більшого сегмента.
9. Радіус кулі дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм кульового сектора цієї кулі, якщо дуга в його осьовому перерізі містить 90° .

10. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, площина якого утворює з цим радіусом кут α . Знайдіть об'єм кулі, якщо площа перерізу дорівнює S .

Рівень С

- З краплيني мильного розчину з діаметром 6 мм хлопчик видув бульбашку з діаметром 30 см. Знайдіть товщину плівки бульбашки.
- Діагоналі ромба дорівнюють a і b . Куля дотикається до всіх сторін ромба. Знайдіть об'єм кулі, якщо відстань від її центра до площини ромба дорівнює m .
- Куля з радіусом 6 дм плаває у воді. Знайдіть висоту частини кулі, яка виступає з води, якщо густина матеріалу кулі становить $0,7 \text{ г/см}^3$.
- Скільки кубометрів землі треба завезти до садової ділянки, щоб насипати клумбу, яка має форму кульового сегмента з радіусом основи 3 м і висотою 50 см? Обчисліть з точністю до одиниць, прийнявши $\pi \approx 3$.
- Кулю, об'єм якої дорівнює $36\pi \text{ см}^3$, перетнули площиною, яка проходить через центр кулі. Знайдіть площі поверхонь кожної з утворених частин кулі.
- Дві паралельні площини перетинають кулю з радіусом 13 см. Радіуси кругів, що утворилися в перерізі, дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть об'єм кульового шару, обмеженого цими кругами.
- Сфера з центром у вершині конуса ділить конус на дві рівновеликі частини. Знайдіть об'єм кулі, обмеженої цією сферою, якщо радіус основи конуса дорівнює r , а кут при вершині його осового перерізу дорівнює α .
- У конус вписано кулю з радіусом r . Кут при вершині осового перерізу конуса дорівнює α . Знайдіть об'єм частини конуса, яка розміщена поза кулею та містить вершину конуса.
- Об'єм кулі дорівнює V . Визначте об'єм кульового сектора, якщо відомо, що його центральний кут дорівнює α .
- У кульовий сектор вписано дві взаємно дотичні кулі, радіуси яких становлять 1 дм і 3 дм. Знайдіть радіус цього сектора.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, як доводити формулу для обчислення об'єму кулі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю формулу об'єму кульового сегмента. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію знаходити об'єм кульового шару. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю формулу для обчислення об'єму кульового сектора. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми учнівських проєктів

- 1.** Об'єм сферичного сегмента: практичне використання у будівництві та в техніці.
- 2.** Історія відкриття й застосування формули об'єму кулі: від Архімеда до сучасності.
- 3.** Застосування формул об'єму кулі та її частин у природничих науках.
- 4.** Вимірювання об'єму кулі експериментальним шляхом.