

**Урок 1. Елементи комбінаторики.
Теорема множення та теорема додавання****План уроку**

1. Поняття вибірки елементів із різних множин. Формування пар (трійок) упорядкованих елементів множин.
2. Теорема множення.
3. Теорема додавання.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані та зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

оцінює достовірність даних [12 МАО 1.2.2-2];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями, ураховує емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2-1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2-2];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1];

висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно, структурує власне мовлення [12 МАО 4.3.2-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв'яжіть 2-3 приклади на повторення.

- 3) Сформулюйте практичні задачі (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) Історичні відомості подавайте у межах часових можливостей.
- 4) До кожного теоретичних тверджень наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Темами проєктів також можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (3–4 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи важливо знати, скількома способами можна скласти розклад руху поїздів?
- 2) Якщо ви обираєте пароль для свого акаунта, то скільки різних паролів можна скласти?
- 3) Чи важливо у транспортній логістиці розуміти, скільки існує маршрутів, що поєднують між собою кілька міст?
- 4) Що спільного між вибором маршруту руху або складанням паролів?
- 5) Скількома способами можна зашифрувати певну інформацію?
- 6) При плануванні подорожі родина розмірковує, який маршрут обрати з двох маршрутів до Львова та трьох маршрутів до Одеси. Скількома різними способами можна поїхати у подорож, якщо обрати лише один маршрут?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Скількома різними способами можна записати елементи множини $\{1, 2, 3\}$ у вигляді впорядкованої трійки? Назвіть усі ці способи.
Відповідь. 6-ма способами; $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.
2. Задано множини $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}$ та $B = \{\{a, b\}, c\}$. Чи існує зв'язок між множинами A і B ?
Відповідь. Так, $B \subset A$.
3. Знайдіть об'єднання множин $A = \{3, 4, 6, 7, 10\}$ та $B = \{1, 2, 5, 8, 9\}$?
Відповідь. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
4. Назвіть множину C , яка є перерізом множин A і B , якщо множина A — множина дівчат десятого класу, а B — множина дівчат школи.
Відповідь. Множина C — множина дівчат 10-го класу.
5. Знайдіть переріз множин $A = \{2, 3, 5\}$ і $B = \{1, 4\}$?
Відповідь. $A \cap B = \emptyset$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Заклад швидкого харчування пропонує відвідувачам обрати обід із двох можливих варіантів.

Варіант 1. Сендвіч, який можна виготовити з трьох різновидів хліба (білого, житнього, цільнозернового) та начинки, з чотирьох наповнювачів (сиру, шинки, курки, овочів).

Варіант 2. Салат, який можна виготовити з двох наповнювачів (зелені або капуста) та заправки з трьох добавок (олії, йогурту, соусу). Відвідувач може купити лише сендвіч, лише салат, або сендвіч і салат разом. Скільки способів вибору обіду існує у відвідувача?

III. Поняття вибірки елементів із різних множин. Формування пар (трійок) упорядкованих елементів множин (5 хв)

Сформулюємо декілька означень.

Означення 1. Вибірками називаються підмножини будь-якої множини. При цьому впорядкованими вибірками називаються вибірки, в яких важливий порядок розташування елементів.

Означення 2. Впорядкованою парою, або **кортежем із довжиною два**, називають таку множину з двох елементів a і b , у якій істотним є не лише самі елементи, але й порядок їхнього розміщення у множині (a, b) .

Означення 3. Дві пари (a, b) і (c, d) називаються **рівними**, якщо їхні відповідні компоненти рівні, тобто $(a, b) = (c, d)$, якщо $a = c$ і $b = d$.

Означення 4. Декартовим добутком множин A і B (позначають $A \times B$) називають множину всіх пар (a, b) таких, що $a \in A, b \in B$.
Записують: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Декартовий добуток двох множин утворює впорядковані пари.

Аналогічно можна визначити поняття впорядкованої трійки елементів — кортежу з довжиною три, впорядкованої четвірки елементів — кортежу з довжиною чотири тощо.

Наприклад, впорядковані трійки елементів: $(2, 1, 3), (2, 2, 3), (1, 2, 8)$.

Означення. Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ називають множину всіх кортежів виду $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, де $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

- 6.** Знайдіть упорядковані пари елементів, які можна вибрати з множин $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{3, 4, 5, 6\}$. У відповідь запишіть кількість упорядкованих пар.

Розв'язання. Знайдемо декартовий добуток $A \times B$.

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$.

Відповідь. 12.

- 7.** Знайдіть $A \times B \times C$, якщо $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$. У відповідь запишіть кількість упорядкованих трійок елементів.

Розв'язання. $A \times B \times C = \{(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_1, c_1), (a_3, b_1, c_2), (a_3, b_2, c_1), (a_3, b_2, c_2)\}$.

Відповідь. 12.

Проблемне запитання. Як можна обчислити кількість упорядкованих пар, трійок тощо елементів декількох множин, якщо не виписувати усі можливі двійки, трійки цих елементів?

У комбінаториці найважливішими принципами підрахунку є теореми множення та додавання, які використовують при розв'язанні комбінаторних задач.

IV. Теорема множення (5–6 хв)

Теорема множення. Якщо множина A складається з m елементів $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ а множина B — із k елементів $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, то вибір упорядкованої пари елементів (a_i, b_j) , де $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$ можна здійснити $m \cdot k$ способами.

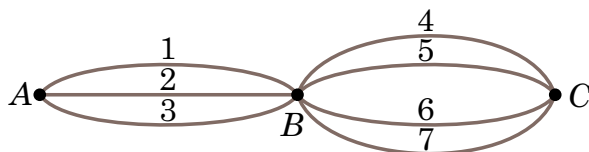
Доведення. Запишемо всі впорядковані пари у вигляді прямокутної таблиці, яка називається *матрицею*:

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_k) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \dots & (a_m, b_k) \end{pmatrix}$$

Таблиця складається із m рядків та k стовпців. Усього в цій таблиці є $m \cdot k$ упорядкованих пар елементів.

Примітка. Теорему множення можна проілюструвати прикладом.

Приклад. Із міста A потрібно потрапити в місто C . Однак, щоб потрапити з міста A в місто C потрібно проїхати через місто B (див. рисунок). Із міста A в місто B проводять три дороги, а з міста B у місто C — чотири дороги. Скількома способами можна потрапити з міста A в місто C ?



Можливі маршрути, безпосереднім підрахунком: $1 - 4$, $1 - 5$, $1 - 6$, $1 - 7$, $2 - 4$, $2 - 5$, $2 - 6$, $2 - 7$, $3 - 4$, $3 - 5$, $3 - 6$, $3 - 7$, тобто 12.

По-іншому: $3 \cdot 4 = 12$, за теоремою множення.

Часто теорему множення називають *правилом множення*, особливо в практичних завданнях комбінаторики.

Теорему множення можна узагальнити на випадок будь-якої скінченної кількості скінченних множин.

Упорядковані трійки (a_m, b_k, c_s) , складені з елементів множин $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ можна записати у вигляді паралелепіпедальної таблиці, розміри якої m, k, s . Тоді число таких трійок елементів становить $m \cdot k \cdot s$.

При збільшенні кількості множин до k , де $k \in \mathbb{N}$, упорядковані вибірки з їхніх елементів складають n -вимірну таблицю, розміри якої $n_1, n_2, \dots, n_k$, де $n_1, n_2, \dots, n_k$ — кількість елементів у відповідних множинах. Тоді кількість таких упорядкованих вибірок множин елементів становить $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

- 8.** Скільки трицифрових чисел можна записати лише непарними цифрами?

Розв'язання. Оскільки непарних цифр є п'ять, тобто $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, то першу цифру можна вибрати п'ятьма способами, другу — також п'ятьма і третю — також п'ятьма. Тому шуканих трицифрових чисел існує: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Відповідь. 125.

- 9.** Скільки трицифрових чисел можна записати лише непарними різними цифрами?

Розв'язання. Оскільки непарних цифр є п'ять, тобто $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, то першу цифру можна вибрати п'ятьма способами, другу — чотирма, бо на одну цифру загальне число цифр зменшилося, і третю — трьома способами, бо на дві цифри загальне число цифр зменшилося.

Тому шуканих трицифрових чисел з різними цифрами існує: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Відповідь. 60.

- 10.** Скількома способами з класу, в якому 25 учнів, можна обрати старосту і заступника.
Розв'язання. Старосту можна обрати з 25 учнів. Після вибору старости його заступника можна обрати з 24-х учнів. Тоді, за теоремою множення, $25 \cdot 24 = 600$ способів вибору.
Відповідь. 600-ма.
- 11.** Скільки парних трицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6?
Розв'язання. Вибір першої цифри, крім 0 (розряд сотень) із 6 можна здійснити 5 способами.
Другою цифрою (розряд десятків) може бути будь-яка із 6 цифр.
Оскільки число парне, то в розряді одиниць може бути 0, 4 або 6.
Тоді кількість трицифрових парних чисел, за теоремою множення, дорівнює $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$.
Відповідь. 90.

V. Теорема додавання (5 хв)

Теорема додавання. Якщо елемент $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ можна вибрати m способами, а елемент $b_j, j = 1, 2, \dots, k$ множини $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ можна вибрати k способами, то вибір елементів a_i або b_j можна здійснити $m + k$ способами.

Теорему додавання можна узагальнити для трьох і більше множин.

Якщо множини A, B і C містять відповідно m, k, i елементів, причому жодні з цих множин не мають спільних елементів, то вибір « a або b , або c », де $a \in A, b \in B, c \in C$, можна здійснити $m + k + i$ способами.

У практичних завданнях комбінаторики теорему додавання часто називають *правилом додавання*.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 12.** На полиці шкільної бібліотеки розташовано 6 книг з історії та 4 книги з біології. Учень хоче отримати або одну книжку з історії, або одну книжку з біології. Скількома способами він може взяти одну з книг?
Розв'язання. Книжку з історії учень може взяти 6-ма способами, а книгу з біології — 4-ма.
За правилом додавання, $6 + 4 = 10$ (способів).
Відповідь. 10-ма.
- 13.** У шкільному буфеті можна купити 4 різновиди булочок і 3 різновиди тістечок. Учениця хоче купити або булочку, або тістечко. Скількома способами вона може здійснити свій вибір?
Розв'язання. Булочку можна вибрати 4-ма способами, а тістечко — 3-ма способами. За правилом додавання, загальна кількість способів: $4 + 3 = 7$ (способів).
Відповідь. 7-ма.

- 14.** У літньому гардеробі учня міститься 4 футболки, 3 сорочки і 2 пари джинсів. Учень може одягнути або футболку з джинсами, або сорочку з джинсами. Скількома способами він може скласти відповідні комплекти одягу?

Розв'язання. Футболку та джинси можна поєднати: $4 \cdot 2 = 8$ (способами).

Сорочку та джинси можна поєднати: $3 \cdot 2 = 6$ (способами).

Загальна кількість можливих комплектів, за теоремою додавання: $8 + 6 = 14$ (способів).

Відповідь. 14-ма.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Заклад швидкого харчування пропонує відвідувачам обрати обід із двох можливих варіантів.

Варіант 1. Сендвіч, який можна виготовити з трьох різновидів хліба (білого, житнього, цільнозернового) та начинки, з чотирьох наповнювачів (сиру, шинки, курки, овочів).

Варіант 2. Салат, який можна виготовити з двох наповнювачів (зелені або капуста) та заправки з трьох добавок (олії, йогурту, соусу). Відвідувач може купити лише сендвіч, лише салат, або сендвіч і салат разом. Скільки способів вибору обіду існує у відвідувача?

Розв'язання. 1) Кількість можливих сендвічів: $3 \cdot 4 = 12$.

2) Обчислимо кількість салатів: $2 \cdot 3 = 6$.

3) До кожного сендвічу відвідувач може взяти будь-який салат, тобто сендвіч і салат можливо купити: $12 \cdot 6 = 72$ (способами).

4) Оскільки покупець може купити лише сендвіч, лише салат, або сендвіч і салат разом, то всього можливих варіантів вибору страв: $12 + 6 + 72 = 90$ (способів).

Відповідь. 90 способів.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. У класі навчаються 10 хлопчиків і 7 дівчаток. Скільки існує способів скласти пару для танців з одного хлопчика та однієї дівчинки?
2. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 3 і 5, якщо цифри у числах можуть повторюватися?
3. Скільки існує двоцифрових чисел, усі цифри яких парні?
4. Скільки існує двоцифрових чисел, усі цифри яких непарні?
5. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4?
6. У класі навчаються 13 хлопців і 7 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного хлопця й одну дівчину в учнівський комітет школи?
7. У магазині продаються 7 видів цукерок і 5 різновидів печива. Андрій хоче купити сестрі або цукерки, або печиво. Скількома способами він може це зробити?

8. Підніжжя гори та її вершину сполучають три стежки. Скільки існує маршрутів піднятися на вершину а потім спуститися вниз до підніжжя гори?
9. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей гербів і цифр може впасти?

Рівень В

- 1.** Розглянемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга — голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова «шабля»?
- 2.** Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0 і 1, якщо цифри у числах можуть повторюватися?
- 3.** У країні Дивосвіт 10 міст, кожні два з яких сполучено авіалініями. Скільки існує авіаліній в цій країні?
- 4.** Скільки різних двоцифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, можна скласти, якщо цифри в числі:
1) не повторюються; 2) можуть повторюватися?
- 5.** 10 учасників шахового турніру грають в залі за 5-ма столиками. Скількома способами можна розмістити шахістів за столами, якщо учасники всіх партій і колір фігур кожного учасника відомі?
- 6.** Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного і одного приголосного звуків у слові «функція»? Першою буквою пари має бути голосний звук.
- 7.** Скількома способами можна скласти ряд із двох білих кульок, однієї чорної кульки, однієї червоної кульки і однієї зеленої кульки, якщо білі кульки мають розміщуватися з обох кінців ряду?
- 8.** До моря веде шість доріг. Скількома способами відпочивальник може дістатися до моря і повернутися назад? Розгляньте випадки, коли рух до моря і від моря відбувається:
1) однією дорогою; 2) різними дорогами.
- 9.** У вівторок за розкладом в 11-Б класі 6 різних уроків, серед яких є алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра та геометрія стояли поряд?
- 10.** У піцерії готують велику й маленьку піци з товстою і тонкою основою. Скільки різних видів піци можна замовити в піцерії, якщо для тонкої піци використовують три види наповнення, а для товстої — чотири?

Рівень С

- 1.** Скількома способами можна розділити замовлення на друкування десяти різних підручників між двома книжковими видавництвами? Жодне видавництво не може отримати всі замовлення.
- 2.** Скільки існує парних п'ятицифрових чисел?
- 3.** Скільки існує п'ятицифрових чисел, кратних 10?
- 4.** Один колекціонер має для обміну 10 марок і 7 монет, другий — 8 марок і 6 монет. Скількома способами колекціонери можуть обмінювати марку на марку або монету на монету?

5. У турнірі взяли участь 10 шахістів, кожен з яких зіграв партію з кожним із суперників. Скільки партій було зіграно в цьому турнірі?
6. У змаганнях з футболу беруть участь 16 команд, кожна з яких проводить по дві зустрічі з кожним із суперників. Скільки матчів буде проведено?
7. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі цифри не повторюються?
8. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 12 так, щоб чисельник і знаменник були різними?
9. Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі не повторюються?
10. Дано цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 6. Установіть відповідність між запитанням (1–4) та відповіддю на нього (А–Д).

Запитання

- 1 Скільки трицифрових чисел можна скласти із заданих цифр, якщо цифри в числах не повторюються?
- 2 Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із заданих цифр, якщо цифри в числах не повторюються?
- 3 Скільки парних трицифрових чисел можна скласти із заданих цифр, якщо цифри в числах можуть повторюватися?
- 4 Скільки чотирицифрових непарних чисел можна скласти із заданих цифр, якщо цифри в числах можуть повторюватися?

Відповідь на запитання

- А 100
Б 120
В 180
Г 300
Д 360

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

ІХ. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію, що таке впорядкована пара або трійка елементів.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я знаю теорему множення.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
3. Я знаю теорему додавання.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
4. Я знаю, як узагальнити теорему множення й теорему додавання для трьох і більше множин.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
5. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

Можливі теми учнівських проєктів

1. Кодування та комбінаторика.
2. Візуалізація комбінаторних задач.
3. Комбінації в інформаційних технологіях.
4. Генератор паролів безпеки.
5. Комбінаторика в повсякденному житті.

Список використаних джерел

- 1) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручн. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. — Харків: Гімназія, 2017. — 416 с.: іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Харків: Гімназія, 2018. — 400 с.
- 3) Істер О. С. Алгебра: підручн. для 9 класу загальноосв. навч. закл. — Київ: Генеза, 2017.