

Урок 3. Статистичне та класичне означення ймовірності

План уроку

1. Основні поняття теорії ймовірностей.
2. Статистично стійкі випробування (досліди). Відносна частота події.
3. Графік залежності відносної частоти подій від серії дослідів.
4. Статистичне означення ймовірності.
5. Класичне означення ймовірності.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

інтерпретує, аналізує, систематизує дані та зв'язки між ними [12 МАО 1.2.2-1];

оцінює вірогідність даних [12 МАО 1.2.2-2];

наводить аргументи, формулює контраргументи, керуючи при цьому власними емоціями та враховуючи емоційний стан інших осіб [12 МАО 2.4.2-1];

висловлює ідеї, пов'язані з розумінням комплексної проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2-2];

вирізняє надлишкові дані для розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2-1];

використовує приладдя та інформаційні технології для знаходження та представлення результату [12 МАО 4.2.3-1].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв'яжіть кілька прикладів на повторення, на ваш вибір.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні.

- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 8) Формуємо навички розв'язання прикладів і задач. Розв'язуємо тренувальні вправи за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Створення проектів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 10) Можливі теми для створення проектів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Як статистика спостережень може впливати на наше уявлення про випадкові події?
- 2) Чи можна оцінити вірогідність настання певної події?
- 3) Навіщо проводити соціологічні опитування серед населення?
- 4) Чи можливо оцінити можливість перемоги улюбленої футбольної (баскетбольної) команди у спортивних змаганнях?
- 5) Чи можливо за допомогою ймовірності події покращити показники влучання гармат або БПЛА по цілях?
- 6) У фільмі «Гра розуму» звучить фраза «Математики виграли війну» (Другу світову війну). Як можна пояснити таке твердження?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Скількома способами 5 вантажівок можуть вишикуватися в колону у певному порядку?
Відповідь. 120-ма.
2. До складу української Прем'єр-ліги з футболу входять 16 команд. Упродовж сезону кожні дві команди грають між собою 2 матчі. Скільки всього матчів буде зіграно за сезон? (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
120	128	200	240	256

Відповідь. Г.

3. Кодовий замок на дверях має 10 різних цифр (див. рисунок). Щоб відчинити двері, потрібно одночасно натиснути дві кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки всього існує різних варіантів коду замка? Вважайте, що коди, утворені перестановкою цифр (наприклад, 1 – 2 і 2 – 1), є однаковими. (ЗНО, 2010 р.).



А	Б	В	Г	Д
100	90	45	20	10

Відповідь. В.

4. Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови та спортивної секції? (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
5	8	10	15	28

Відповідь. Г.

5. Футбольна команда з 11-и гравців обирає на матч капітана та віце-капітана. Скільки всього існує способів здійснити цей вибір?

Відповідь. 110.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На зупинку прибувають автобуси з трьох різних маршрутів. Відомо, що з 60 рейсів упродовж дня 25 разів прибуває на зупинку автобус маршруту №1, 20 разів — автобус маршруту №2, 15 разів — автобус маршруту №3.

- 1) Використовуючи класичне означення, знайдіть імовірність того, що випадково обраний автобус буде з маршруту №2.
- 2) Знайдіть ймовірність прибуття на зупинку автобусів маршрутів №1 або №3.
- 3) Протягом години на зупинку прибуло 10 автобусів, серед яких 4 автобуси були маршруту №2. Використовуючи статистичне означення, обчисліть імовірність приїзду автобуса маршруту №2.

III. Основні поняття теорії ймовірностей (7–8 хв)

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі явищ, що враховують вплив випадку. Висновки, які випливають із дослідження цих моделей, дають змогу передбачити перебіг явища чи процесу в майбутньому.

Методами теорії ймовірностей розв'язують задачі, які виникають у таких галузях людської діяльності: комунікація з використанням технічних засобів, контроль якості масової продукції, страхова справа, банківська справа (кредитування), диспетчерська та кур'єрська служби (аеропорти, доки, порти, пошта), економіка, метеорологія, демографія, теорія ігор, теорія стрільби у військовій справі, атомна фізика, статистична фізика, поширення епідемій, спадковість у біології тощо.

Аналізом результатів, одержаних за допомогою моделей, створених методами теорії ймовірностей, займається **математична статистика**.

Основні поняття теорії ймовірностей:

- випробування або дослід;
- подія;
- ймовірність.

Первісним поняттям теорії ймовірностей є поняття *події*.

Означення. Під *подією* розуміють будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбудеться або не відбудеться.

Кожна подія відбувається внаслідок проведення дослідів або випробування.

Означення. *Дослідом* або *випробуванням* називають створення таких умов, результатом яких є подія.

Наведемо приклади дослідів та подій (табл. 1).

Таблиця 1

№	Досліди (випробування)	Події
1	Підкидання грального кубика	Випадання шістки або будь-якого іншого числа: 1, 2, 3, 4, 5
2	Придбання лотерейного білета	Виграш білета або програш білета
3	Зерно сіється в землю	Проростання паростка або його не проростання
4	Випадання кульок у грі «Мегалот»	Поява кульки з певним номером
5	Перевірка якості виготовлених однотипних деталей на виробництві	Підтвердження якісної деталі або вилучення бракованої деталі
6	Стрільба по мішені одним стрільцем	Влучення у мішень або промах
7	Кредитування банками фізичних або юридичних осіб	Своєчасна сплата відсотків по кредиту або несплата відсотків
8	Виробнича діяльність підприємства	Отримання прибутку або не отримання прибутку
9	Есмінець рухається по замінованій акваторії моря	Есмінець пройде неушкодженим або підірветься на міні
10	Страховання певної особи від нещасних випадків	Виплата цій особі фінансової компенсації

Події позначають великими буквами латинського алфавіту $A, B, C, \dots U, V \dots$, аналогічно позначенню множин. Певною ідеалізацією подій є їхня попарна несумісність та рівноможливість.

Означення попарно несумісних та рівноможливих подій, а також простору елементарних подій.

Означення. Події A, B, C називаються **попарно несумісними** в даному випробуванні, якщо жодні дві з них не можуть відбутися одночасно.

Означення. Події A, B, C називаються **рівноможливими**, якщо кожна з цих подій не має ніяких переваг перед іншими.

Наприклад, усі події, наведені в таблиці 1, є попарно несумісними та рівноможливими.

Результатом проведення випробування є його наслідки. Наслідки випробування позначають як ω_i , де $i = 1, 2, \dots, n$, де n — кількість усіх можливих наслідків даного випробування. У найпростіших випадках наслідки випробування й події є тотожними поняттями.

Приклади наслідків випробування

1. При одноразовому підкиданні грального кубика можливі наслідки: $\omega_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тобто випадання однієї з шести цифр.
2. При одноразовому підкиданні монети можливі наслідки: $\omega_i = \{\Gamma, \Pi\}$, тобто випадання герба (Γ) або цифри (Π).
3. При перевірці якості виготовлених на виробництві виробів можливі наслідки: $\omega_i = \{\omega_1, \omega_2\}$, де ω_1 — виріб придатний, ω_2 — виріб бракований.

Якщо внаслідок проведення випробування обов'язково відбудеться хоча б одна зі всіх можливих елементарних подій, то такі події утворюють повну групу подій.

Елементарні події — це рівноможливі та несумісні події. Такі події утворюють повну групу подій або простір подій.

Означення. **Сукупність** або **множину** всіх елементарних подій випробування називають простором елементарних подій та позначають Ω .

Приклади подій, що утворюють простір елементарних подій

1. Виграш або програш даного лотерейного білета.
2. Випадання «цифри» або «герба» при підкиданні монети.
3. Влучення в ціль або промах при одному пострілі.
4. Випадання однієї з 6 цифр під час одного підкидання грального кубика.
5. Виплата або невиплата банку клієнтом узятих у кредит коштів.
6. Виготовлення стандартної або бракованої деталі одним робітником.

Якщо події є елементарними, то елементарні наслідки та елементарні події — еквівалентні поняття.

Приклад. При підкиданні двох гральних кубиків елементарним наслідком є пара чисел $\omega = (a, b)$, де a — одна із цифр першого кубика, b — одна із цифр другого кубика. При цьому, $1 \leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$. Кожний із зазначених елементарних наслідків є елементарною подією за тих же умов випробування.

Усі події поділяються на:

- достовірні;
- випадкові;
- неможливі.

Означення. *Достовірною* називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися.

Простір елементарних подій Ω — це множина, яка складається з усіх можливих елементарних подій, її називають універсальною множиною і позначають U . Таким чином, *універсальна множина є достовірною подією*.

Приклад. При підкиданні грального кубика може випасти одна із шести граней. Скупність усіх елементарних подій (елементарних наслідків), тобто випадання однієї з шести граней, утворює універсальну множину.

Отже, маємо такі еквівалентні означення: повна група подій, простір елементарних подій, достовірна подія.

Якщо деяка подія V ніколи не відбудеться при кожному здійсненні експерименту, то вона є *неможливою* (інше позначення $\emptyset$).

Якщо деяка подія в одних випробуваннях відбувається, а в інших — ні, то вона називається *випадковою*.

IV. Статистично стійкі випробування (досліди). Відносна частота події (6–8 хв)

Найважливішим поняттям теорії ймовірностей є ймовірність події.

Існують три означення ймовірності події:

- статистичне;
- класичне;
- геометричне.

Ймовірність є числовою характеристикою можливості появи випадкової події за певної умови, яка може бути відтворена велику кількість разів.

Припустимо, що за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадках з них відбулася подія A .

Означення. Відношення $\frac{n(A)}{n}$ називають *відносною частотою події A* і позначають $v(A)$.

$$\text{Тобто } v(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Приклади статистично стійких випробувань

1. Перевіряють на якість 1000 зразків певного виду продукції. Серед них виявлено 12 бракованих виробів. Тоді відносна частота події «виріб бракований» дорівнює $\frac{12}{1000} = 0,012$.
2. При експериментальній перевірці ліків на 100 пацієнтах у 88 випадках відбулося покращення стану хворих, тоді відносна частота події «ліки мають позитивний ефект» дорівнює 0,88.
3. Снайпер виконав 100 пострілів із однієї гвинтівки, з яких 79 разів він влучив у ціль. Тоді відносна частота події «влучення у ціль» дорівнює 0,79.

4. Зі 120 позичальників банку 96 вчасно сплачують відсотки по кредиту. Тоді відносна частота події «вчасна сплата відсотків по кредиту» становить 0,8.
5. Якщо проаналізувати текст художньої книжки і порахувати кількість певної букви, яка зустрічається в тексті, то можна отримати наступні результати: на 1000 вибраних навмання букв та проміжків між ними буква «к» зустрічається в середньому 28 разів, буква «о» зустрічається в середньому 90 разів, буква «а» – 62 рази. Тоді відносні частоти того, що в тексті зустрічається буква «к» дорівнює 0,028; буква «о» – 0,09; буква «а» – 0,062.

Усі наведені приклади дослідів є статистично стійкими. Статистичне означення ймовірності можна застосовувати лише для статистично стійких дослідів.

Означення. Досліди, в яких відносна частота події при повторенні серії з достатньо великої кількості дослідів коливається близько одного й того самого числа, називаються **статистично стійкими**.

Означення. Число, біля якого коливається відносна частота події, називається **ймовірністю** цієї події, $v(A) = \frac{n(A)}{n} \approx P(A)$.

Позначення: $P(A)$, $P(B)$ від *probabilitas* (лат.) — ймовірність.

Статистичне означення ймовірності називають післядослідним, оскільки його можна застосовувати лише після проведення дослідів.

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

6. У деякому місті впродовж першого кварталу народилися:

- у січні – 145 хлопчиків та 135 дівчаток;
- у лютому – 142 хлопчики та 136 дівчаток;
- у березні – 152 хлопчики та 140 дівчаток.

Яка ймовірність народження хлопчика?

Розв'язання. Нехай A_i , де $i = 1, 2, 3$, — подія, що народився хлопчик у січні, лютому та березні відповідно. Тоді відносні частоти цих подій:

$$v(A_1) = \frac{145}{280} \approx 0,518;$$

$$v(A_2) = \frac{142}{278} \approx 0,511;$$

$$v(A_3) = \frac{152}{292} \approx 0,521.$$

Число, біля якого коливається відносна частота події народження хлопчика, тобто середнє арифметичне відносних частот, дорівнює 0,517. Це і буде ймовірністю народження хлопчика.

Відповідь. 0,517.

Примітка. Знайдена ймовірність народження хлопчиків добре відома у демографії — науці, що вивчає динаміку населення. Це означає, що у звичайних умовах частка народження хлопчиків практично не буде відхилятися від знайденої ймовірності.

7. Технічний контроль у партії з 90 принтерів виявив 2 браковані принтери. Знайдіть відносну частоту появи бракованих принтерів.

Розв'язання. Нехай подія A — «бракований принтер».

Оскільки загальна кількість принтерів становить 90, то $n = 90$.

При цьому бракованих принтерів два, тому $m = 2$.

Знайдемо відносну частоту появи бракованого принтера: $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{90} \approx 0,02$.

Відповідь. 0,02.

8. Гральний кубик підкинули 30 разів, із них 4 рази випала грань із шістьма крапками (очками). Знайдіть відносну частоту події «випали 6 очок».

Розв'язання. Нехай подія B — «випали 6 очок». Оскільки загальна кількість підкидань кубика становить 30, то $n = 30$. При цьому 6 очок випали 4 рази, тому $m = 4$.

Знайдемо відносну частоту події «випали 6 очок»: $W(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{30} \approx 0,13$.

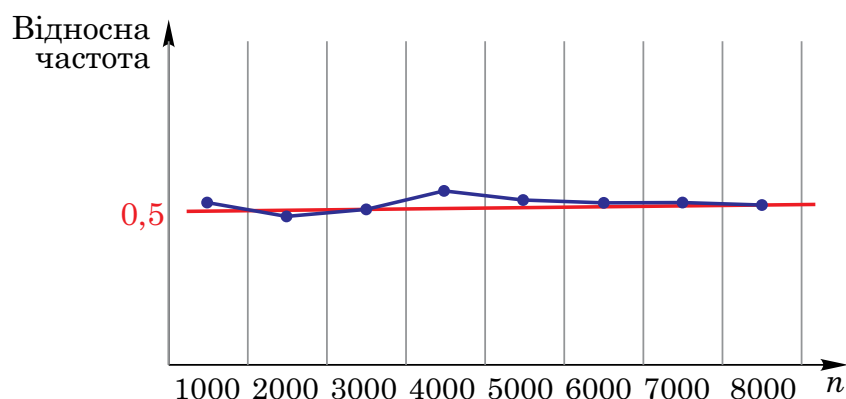
Відповідь. 0,13.

V. Графік залежності відносної частоти подій від серії дослідів (4–5 хв)

Щоби за відсною частотою випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою. Починаючи з XVII ст., проводилися серії випробувань із підкидання монети. У таблиці подано результати восьми серій таких випробувань.

Номер серії	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість підкидань	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Кількість гербів	501	989	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Відносна частота появи герба	0,501	0,495	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Якщо побудувати графік залежності кількості випадання герба від кількості підкидань монети, то можна побачити, що відносна частота появи герба коливається біля числа 0,5 і мало відрізняється від нього.



Зі збільшенням кількості дослідів відносна частота події наближається до теоретичної ймовірності цієї події. Якщо відносна частота встановлена дослідним шляхом, то одержане число можна прийняти за наближене значення ймовірності події випадання герба при підкиданні монети.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 9.** Монету підкинули 500 разів. Цифра випала 263 рази. Оцініть імовірність випадання цифри.

Розв'язання. Нехай подія A — випадання цифри при підкиданні монети.

Загальна кількість випробувань $n = 500$. Число випадання цифри: $m = 263$.

$$\text{Тоді } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{263}{500} = 0,526.$$

Відповідь. 0,526.

- 10.** Орендатор ставка вирішив визначити, скільки риби в ставку, придатної для виловлювання. Для цього він закинув сітку з наперед заданими розмірами вічок і, витягнувши її, виявив 100 рибин. Позначивши кожну з них міткою, він кинув рибини назад у ставок. Наступного дня орендатор закинув ту саму сітку і спіймав 120 рибин, на восьми з яких були його мітки. Як можна оцінити кількість риби в ставку, придатної для виловлювання?

Розв'язання. Якщо в ставку n рибин, то відносна частота події «навмання взята риба мічена» дорівнює $\frac{100}{n}$. Наступного дня було впіймано 120 рибин, на восьми

з яких — мітки. Відносною частотою події «риба з мітками» є число $\frac{8}{120}$.

Оскільки обидві відносні частоти визначають подію «навмання взята риба мічена», то прирівнюємо їх: $\frac{8}{120} \approx \frac{100}{n}$.

Тоді $n \approx 1500$. Отже, в ставку близько 1500 рибин, придатних для виловлювання.

Відповідь. 1500.

- 11.** Відносна частота події «виготовлення стандартної деталі» бригадою фрезерувальників на підприємстві становить 0,95. При перевірці якості виготовлених деталей було виявлено 6 бракованих. Скільки деталей виготовила бригада фрезерувальників?

Розв'язання. Нехай бригада виготовила n деталей. Тоді відносна частота виготовлення стандартної деталі дорівнює відношенню $\frac{n-6}{n}$.

$$\text{Таким чином } \frac{n-6}{n} = 0,95, \text{ звідси } n-6 = 0,95n, n = 120.$$

Відповідь. 120 деталей.

VI. Класичне означення ймовірності

Означення. Відношення числа наслідків події A , що сприяють її появі, до загального числа всіх рівноможливих наслідків, які взаємно виключають один одного, називається **ймовірністю події A** .

Тобто, за означенням, ймовірністю події A є число $P(A) = \frac{m}{n}$, де n — загальна кількість рівноможливих наслідків, які взаємно виключають один одного в даному випробуванні, m — кількість наслідків, що сприяють появі події A .

Класичне означення ймовірності називають додослідним, оскільки його можна застосувати до проведення дослідів. Застосування класичного означення ймовірності можливе за умови, що всі елементарні події є рівноможливими.

Основні властивості ймовірності

1. $P(U) = 1$, ймовірність достовірної події дорівнює 1.

2. $P(V) = 0$, ймовірність неможливої події дорівнює 0.

3. Якщо A — випадкова подія, то $0 < P(A) < 1$.

Властивості 1 – 3 випливають із означення ймовірності.

4. Для статистично стійких дослідів сума ймовірностей деякої події та протилежної до неї дорівнює 1: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Доведення. Оскільки в кожному випробуванні відбувається одна і тільки одна із подій A або $\bar{A}$, то $n(A) + n(\bar{A}) = n$. Тому $\frac{n(A)}{n} + \frac{n(\bar{A})}{n} = 1$, звідси $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Отже, для статистично стійких дослідів сума ймовірностей деякої події та протилежної до неї дорівнює 1.

Ілюстративні приклади (5 хв)

12. На полиці розміщено 10 книг, із яких дві книги — з фізики. Дослід полягає в тому, що навмання беремо одну із книг. Яка ймовірність того, що буде взято книгу з фізики? Яка ймовірність того, що вибрано іншу книгу?

Розв'язання. Уведемо позначення подій:

1) подія A — «взято книгу із фізики»;

2) подія B — «взято будь-яку іншу книгу».

Тоді ймовірності цих подій становлять: $P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$; $P(B) = \frac{8}{10} = 0,8$.

Відповідь. 0,2; 0,8.

13. У коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що навмання взята куля матиме номер, кратний трьом?

Розв'язання. Нехай подія A — «вийнята куля має номер, кратний 3».

У цьому випробуванні є 15 рівноможливих наслідків, з яких п'ять наслідків сприяють події A , а саме: кулі з номерами 3, 6, 9, 12, 15. Отже, $m = 5$.

Тоді, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

- 14.** Для перевірки якості виготовлених деталей було взято 200 деталей, серед яких 6 виявилися бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вилучена деталь із цієї партії буде: 1) бракованою; 2) придатною?

Розв'язання. Нехай подія A – деталь бракована, подія B – деталь придатна.

Ймовірності цих подій: $P(A) = \frac{6}{200} = 0,03$, $P(B) = \frac{194}{200} = 0,97$.

Відповідь. 0,3; 0,97.

- 15*.** Яка ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків на них випадуть однакові цифри?

Розв'язання. Зазначену подію позначимо через A . Всі наслідки випробування, яке полягає у підкиданні двох гральних кубиків, є рівноможливими. Оскільки на першому кубіку може випасти будь-яка із 6 цифр, на другому — аналогічно, то загальна кількість наслідків становить $6 \cdot 6 = 36$, за комбінаторною теоремою множення.

Подія A — «випадуть однакові цифри» наступить тоді, коли цифри на кубиках будуть рівними. Існує шість наслідків, що задовольняють подію A .

Отже, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Відповідь. $\frac{1}{6}$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** На зупинку прибувають автобуси з трьох різних маршрутів. Відомо, що з 60 рейсів упродовж дня 25 разів прибуває на зупинку автобус маршруту №1, 20 разів — автобус маршруту №2, 15 разів — автобус маршруту №3.

1) Використовуючи класичне означення, знайдіть ймовірність того, що випадково обраний автобус буде з маршруту №2.

2) Знайдіть ймовірність прибуття на зупинку автобусів маршрутів №1 або №3.

3) Протягом години на зупинку прибуло 10 автобусів, серед яких 4 автобуси були маршруту №2. Використовуючи статистичне означення, обчисліть ймовірність приїзду автобуса маршруту №2.

Розв'язання. 1) Нехай подія A — «вибрано автобус з маршруту №2».

Усього рейсів упродовж дня, $n = 60$.

Кількість сприятливих рейсів для маршруту №2: $m = 20$.

Тоді, за класичним означенням ймовірності: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} \approx 0,33$.

2) Нехай подія B — «на зупинку прибули автобуси маршрутів №1 або №3».

Оскільки автобус першого маршруту прибуває на зупинку 25 разів, автобус третього маршруту прибуває на зупинку 15 разів, то $m = 40$ — прибуття автобусів маршрутів №1 або №3.

Тоді $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{40}{60} \approx 0,67$.

3) Упродовж години було $n = 10$ спостережень, серед яких сприятливих $n(A) = 4$ — прибуття автобуса маршруту №2.

За статистичним означенням ймовірності: $P(A) \approx \frac{n(A)}{n} = \frac{4}{10} = 0,4$.

Для більш точної оцінки статистичної ймовірності за відносною частотою, кількість випробувань (спостережень) має бути достатньо великою.

Відповідь. 1) 0,33; 2) 0,67; 3) 0,4.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Ймовірність того, що в навання взятій сім'ї є комп'ютер, дорівнює 0,68. Скільки в середньому комп'ютерів буде в 500 сім'ях?

А	Б	В	Г	
310	320	330	340	350

2. Із чисел 1, 2, 3, ... 20 навання вибирають число. Знайдіть ймовірність того, що це число ділиться на 5.

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

3. Яка ймовірність того, що навання вибране двоцифрове число ділиться на 11?
(ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

4. Ймовірність того, що навання вилучена з партії деталей деталь є бракованою, дорівнює 0,008. Скільки в середньому бракованих деталей буде серед 500 деталей?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

5. Обчисліть ймовірність того, що навання вибране двоцифрове число ділиться на 12.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{13}{90}$

6. У коробці є 80 цукерок, із яких 44 з білого шоколаду а решта – з чорного. Обчисліть ймовірність того, що навання взята з коробки цукерка буде з чорного шоколаду. (ЗНО, 2008 р.).

А	Б	В	Г	Д
0,35	0,45	0,55	0,65	0,75

7. На полиці містяться 18 однакових банок із джемом. Серед них 6 банок з абрикосовим джемом, 12 – з яблучним. За кольором джеми не відрізняються один від одного. Господиня навмання взяла одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з абрикосовим джемом? (ЗНО, 2010 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	інша відповідь

8. Яка ймовірність того, що при одному підкиданні грального кубика випаде число очок, кратне 3?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

9. Числа від 1 до 30 написані на 30 картках по одному на кожній. Вибирають навмання одну картку. Обчисліть імовірність вибору простого числа.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

10. Монету підкидають двічі. Обчисліть імовірність, що обидва рази випаде «герб».

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,2	0,25	0,3	0,5

11. Числа від 1 до 20 написані на картках, по одному на кожній. Вибирають навмання одну картку. Обчисліть імовірність того, що вибране число буде або простим, або кратним трьом.

А	Б	В	Г	Д
0,45	0,55	0,6	0,65	0,7

12. У туриста є 10 однакових за розмірами консервних банок, серед яких 4 банки – з тушкованим м'ясом, 6 банок – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Турист навмання взяв одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з рибою? (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Рівень В

1. Із натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30? (ЗНО, 2008 р.).

2. Власник банкоматної картки забув дві останні цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть ймовірність того, що з першої спроби він отримає доступ до системи. (ЗНО, 2006 р.).
3. Майстер обслуговує три верстати: 20% робочого часу він обслуговує перший верстат, 30% — другий, 50% — третій. Обчисліть ймовірність того, що в навмання вибраний момент робочого часу майстер обслуговує перший або третій верстат. (Пробне ЗНО, 2015 р.).
4. Ймовірність браку виробництва складає 8 %. Яке буде найімовірніше число значення браку для 500 виготовлених деталей?
5. Грані грального кубика пофарбовано в чорний або білий колір (кожну грань — в один із кольорів). Ймовірність випадання чорної грані становить 0,75, а ймовірність випадання білої грані — 0,25. Скільки чорних і скільки білих граней має кубик?
6. У сумці лежать яблука, серед яких 8 — червоні, решта — жовті. Знайдіть кількість жовтих яблук, якщо ймовірність витягти навмання червоне яблуко дорівнює 0,4. (ЗНО, 2008 р.).
7. У відділі працює певна кількість чоловіків і жінок. Для анкетування навмання вибрали одного зі співробітників. Ймовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайдіть відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі. (ЗНО, 2011 р.).
8. 70 % старшокласників однієї школи вивчають англійську мову, 30 % — німецьку мову, 20 % вивчають обидві мови. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний учень не вивчає жодної мови.
9. На десяти картках виписано натуральні числа від 1 до 10. Навмання вибирається два з них. Знайдіть ймовірність того, що добуток чисел на вибраних картках буде непарним.
10. У скриньці заховані 8 білих та 12 чорних кульок. Із скриньки, одна за одною, вилучають дві кульки. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

- 1 Ймовірність вилучення другої чорної кульки за умови, що перша — чорна кулька, дорівнює ...
- 2 Ймовірність вилучення другої чорної кульки за умови, що перша — біла, дорівнює ...
- 3 Ймовірність вилучення другої білої кульки за умови, що перша — біла, дорівнює ...

Закінчення речення

- А $\frac{14}{95}$
- Б $\frac{33}{95}$
- В $\frac{3}{5}$
- Г $\frac{38}{95}$
- Д $\frac{24}{95}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐

- 11.** На двадцяти картках виписані натуральні числа від 1 до 20. Навмання вибирається одна із них. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

- 1 Ймовірність вилучення такої картки, щоб число ділилося на 4 або на 7, дорівнює ...
- 2 Ймовірність вилучення такої картки, щоб число ділилося на 2 і на 3, дорівнює ...
- 3 Ймовірність вилучення такої картки, щоб число ділилося на 9 або на 10, дорівнює ...
- 4 Ймовірність вилучення такої картки, щоб число було двоцифрове з парною сумою цифр, дорівнює ...

Закінчення речення

А 0,3

Б $\frac{3}{20}$

В $\frac{7}{20}$

Г 0,2

Д 0,4

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

- 12.** У квітковому магазині продають червоні, жовті та білі троянди. Навмання вибирають одну троянду. Ймовірність того, що ця троянда червона, дорівнює $\frac{3}{8}$. Обчисліть ймовірність того, що вибрана троянда біла або жовта. (ЗНО, додаткова сесія, 2011 р.).

Рівень С

- 1.** Із п'яти відрізків, завдовжки 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см, навмання вибирають три. З якою ймовірністю з вибраних відрізків можна побудувати трикутник?
- 2.** Дерев'яний куб, усі грані якого пофарбовані, майстер Допитливий розпиляв на 1000 однакових кубиків. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання кубик має лише дві пофарбовані грані.
- 3.** В автобусному парку налічується n автобусів, шосту частину яких було обладнано інформаційним табло. Пізніше інформаційні табло встановили ще на 2 автобуси з наявних у парку. Після проведеного переобладнання навмання вибирають один з n автобусів парку. Ймовірність того, що це буде автобус з інформаційним табло, становить 0,25. Визначте n . Уважайте, що кожен автобус обладнується лише одним табло. (ЗНО, 2013 р.).
- 4.** Із карток, на кожній з яких написана одна з літер М, Р, О, А, Е, навмання вибирають 4 картки. Знайдіть ймовірність того, що поклавши їх в ряд у тому порядку, в якому їх вибирали, одержать слово МОРЕ.
- 5.** У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок із чорного шоколаду. Усі цукерки мають однакові форму та розміри. Якого найменшого значення може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду 0,25?
- 6.** Грані звичайного грального кубика пофарбовано в червоний і жовтий кольори. Ймовірність випадання червоної грані дорівнює $\frac{1}{6}$, ймовірність випадання жовтої грані становить $\frac{5}{6}$. Скільки червоних і жовтих граней має кубик?

- 7.** У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:
- 1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$; 2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{6}$?
- 8.** У ящику лежать 12 жовтих і 15 синіх кульок. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання восьми кульок 5 кульок будуть жовтого кольору?
- 9.** Відомо, що баскетболістка влучає в кошик під час штрафного кидка з ймовірністю більшою за 0,8, але меншою від 0,82. Скільки приблизно виконано штрафних кидків під час тренування, якщо баскетболістка мала 5 промахів?
- 10.** Випускник університету планує працювати в банку або в страховій компанії. Після співбесіди в цих установах він оцінює ймовірність бути прийнятим на роботу в банку як 0,5, а в страхову компанію — як 0,6. Крім того, він вважає, що йому надійде пропозиція з обох цих установ із ймовірністю 0,4. Як випускник університету має оцінити ймовірність бути прийнятим на роботу?

IX. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|------------|---|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, які існують означення ймовірності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію означення статистично стійких дослідів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю статистичне означення ймовірності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, коли можна застосовувати статистичне означення ймовірності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю класичне означення ймовірності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, коли можна застосовувати класичне означення ймовірності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я знаю властивості ймовірності подій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 10. | Я розумію, навіщо обчислювати ймовірності подій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми учнівських проєктів

1. Роль монети в теорії ймовірностей.
2. Медицина та ймовірність.
3. Ймовірність і ризик: кредитування, інвестиції, депозити.
4. Мій щоденний світ ймовірностей.
5. Статистична ймовірність у соціології та в медицині.