

Урок 4. Урок–практикум. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) повторите основні комбінаторні формули;

2) роз'яжете задачі на застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій;

3) зрозумієте постановку задач вибору елементів із різних множин елементів;

4) навчитеся розв'язувати задачі на обчислення ймовірностей вибору елементів із різних множин;

5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Із натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне число. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30? (ЗНО, 2006 р.).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{15}$

- 2.** Пасічник зберігає мед в однакових закритих металевих бідонах. Їх у нього дванадцять: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох — мед із липи, у п'яти — мед із гречки. Знайдіть імовірність того, що перший навмання відкритий бідон буде містити квітковий мед. (ЗНО, 2010 р.)

А	Б	В	Г	Д
0,25	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0,75	$\frac{1}{3}$

- 3.** (За умовою попередньої задачі). Яка ймовірність того, що перший навімання відкритий бідон буде містити липовий або гречаний мед?
- 4.** Випущено партію лотерейних білетів. Імовірність того, що навімання вибраний білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визначте кількість білетів без виграшу серед цих 300 білетів. (ЗНО, 2015 р.).
- 5.** У коробці лежать 5 червоних кульок, 3 сині та 2 зелені кульки. Навмання виймають одну кульку. Знайдіть імовірність того, що витягнута кулька буде не червоною.

III. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій

Три важливі комбінаторні формули

- 1.** Перестановки без повторення елементів: $P_n = n!$
- 2.** Розміщення без повторення елементів: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- 3.** Комбінації без повторення елементів: $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Формули комбінаторики застосовуються під час розв'язування задач з теорії ймовірностей, оскільки дозволяють обчислювати кількість можливих наслідків подій та сприятливих випадків, що є основою для знаходження ймовірності випадкової події.

Приклад 1. Із цифр 1, 2, 3, 4 складають трицифрові числа так, що цифри в числах не повторюються. Обчисліть ймовірність того, що сума цифр у навмання вибраного трицифрового числа:

- 1) дорівнює 8; 2) менша від 8.

Розв'язання. 1) Нехай подія A — «сума цифр трицифрового числа дорівнює 8».

Обчислимо загальну кількість трицифрових чисел, тобто кількість розміщень із чотирьох елементів по три елементи: $n = A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Сума заданих цифр дорівнює 8, якщо це цифри: 1, 3, 4.

Кількість трицифрових чисел, складених із трьох цифр (без повторення цифр):
 $m = 3! = 6$.

Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$ — ймовірність події A .

- 2) Нехай подія B — «сума цифр трицифрового числа менша від 8».

Розглянемо вибірки цифр таких, щоб їхня сума була меншою від 8.

Можливі вибірки: $\{1, 2, 3\}$ і $\{1, 2, 4\}$.

Кількість таких чисел: $m = 2 \cdot 3! = 12$.

Тоді $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0,5$ — ймовірність події B .

Відповідь. 1) 0,25; 2) 0,5.

IV. Задачі вибору з різних множин елементів

Потрібно зі скриньки, в якій є m білих та n чорних кульок вибрати r кульок, серед яких k білих. Кількість таких вибірок становить: $C_m^k \cdot C_n^{r-k}$, за теоремою множення.

Це правило можна узагальнити на скінченну кількість підмножин деякої множини.

Нехай множина A містить підмножини A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$, до кожної з яких входять n_i елементів. Якщо з кожної підмножини вибрати m_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$ елементів, порядок розміщення яких несуттєвий, то кількість таких неупорядкованих вибірок обчислюють за формулою: $C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_k}^{m_k}$.

Приклад 2. Президенту фінансової компанії потрібно скласти групу із 6 фахівців, до якої має ввійти хоча б один математик. Скількома способами він може це зробити, якщо в нього працюють 2 математики та 8 економістів?

Розв'язання. До зазначеної групи має ввійти один математик та 5 економістів або 2 математики та 4 економісти.

Вибір одного математика із двох можливий C_2^1 способами, і при цьому вибір 5 економістів із 8 можна здійснити C_8^5 способами. Разом вибір одного математика та п'ятьох економістів можна здійснити $C_2^1 \cdot C_8^5$ способами.

Вибір двох математиків із двох можливий C_2^2 способами, і при цьому вибір 4 економістів із 8 можна здійснити C_8^4 способами. Разом вибір двох математиків та чотирьох економістів можна здійснити $C_2^2 \cdot C_8^4$ способами.

Загальна кількість способів вибору групи з одного математика та 5 економістів або 2 математиків та 4 економістів, за теоремою додавання, дорівнює:

$$C_2^1 \cdot C_8^5 + C_2^2 \cdot C_8^4 = 2 \cdot 56 + 1 \cdot 70 = 182.$$

Відповідь. 182-ма.

V. Обчислення ймовірності вибору з різних множин елементів

Приклад 3. Президент компанії хоче створити команду дизайнерів для розробки нової моделі товару у складі трьох інженерів і двох спеціалістів із дослідження ринку. Яка ймовірність створення такої команди, якщо з групи 10 інженерів і 5 спеціалістів із дослідження ринку вибрати навмання п'ять осіб?

Розв'язання. 1) Позначимо через A подію, що навмання відібрана команда з 5 осіб складається з трьох інженерів і двох спеціалістів із дослідження ринку.

2) Загальна кількість способів вибору 5 осіб із 15 дорівнює кількості комбінацій із 15 по 5 елементів, тобто: $n = C_{15}^5 = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$.

3) Знайдемо кількість сприятливих наслідків події A .

Трьох інженерів із 10 можна вибрати C_{10}^3 способами і при цьому два спеціалісти з дослідження ринку із 5 можна вибрати C_5^2 способами. Вибір інженерів і спеціалістів із дослідження ринку здійснюється незалежно $C_5^2 \cdot C_{10}^3$ способами.

Отже, $m = C_5^2 \cdot C_{10}^3 = 1200$.

$$4) \text{ Тоді } P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^5} = \frac{1200}{3003} \approx 0,4.$$

Відповідь. 0,4.

Сформулюємо загальну задачу обчислення ймовірності вибору елементів із різних множин і визначимо алгоритм її розв'язання.

Інвестиційна компанія має n пакетів акцій, серед яких m пакетів акцій заводів із виробництва гаджетів. Визначити ймовірність того, що серед навмання відібраних k пакетів акцій є рівно r пакетів акцій заводів із виробництва гаджетів.

Алгоритм розв'язання

- 1) Позначимо подію, ймовірність якої потрібно знайти, наприклад, подією A .
- 2) Знайдемо загальну кількість способів вибору з n пакетів акцій k пакетів. Кількість способів такого вибору C_n^k .
- 3) Знайдемо кількість сприятливих наслідків події «серед навмання відібраних k пакетів акцій є рівно r пакетів акцій заводів із виробництва гаджетів». Кількість способів такого вибору становить $C_k^r \cdot C_{n-m}^{k-r}$.
- 4) Обчислимо ймовірність події A : $P(A) = \frac{C_k^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$.

Приклад 4. Філія банку впродовж місяця може надати позику шістьом своїм клієнтам. Замовлення на позику надійшли від 10 клієнтів першого району і 8 клієнтів другого району. Банк розігрує випадковим чином 6 позик серед тих, від кого надійшли замовлення. Знайдіть ймовірність того, що позика дістанеться чотирьом клієнтам першого району.

Розв'язання. Позначимо через A подію, що «позика дістанеться чотирьом клієнтам першого району та двом клієнтам другого району», оскільки банк надає 6 позик. Кількість наслідків даного випробування дорівнює кількості способів вибору із 18 осіб по 6 осіб, тобто $n = C_{18}^6$.

Усі можливі четвірки клієнтів першого району можна утворити C_{10}^4 способами, а всі можливі двійки клієнтів другого району — C_8^2 способами. Кількість способів вибору четвірки клієнтів першого району і двох клієнтів другого району можна здійснити $m = C_{10}^4 \cdot C_8^2$ способами.

$$\text{Отже, ймовірність події } A: P(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_{10}^4}{C_{18}^6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot \frac{6! \cdot 12!}{18!} = \frac{70}{221} \approx 0,317.$$

Відповідь. 0,317.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У ліфт на першому поверсі десятиповерхового будинку зайшли 4 пасажери, кожен з яких може вийти незалежно один від іншого на довільному поверсі з другого по десятий включно. Знайдіть імовірність того, що всі пасажери вийдуть:

- 1) на п'ятому поверсі;
- 2) на одному поверсі.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. На кожній із чотирьох однакових карток записано одну з літер: А, В, К, С. Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово КВАС?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

2. У партії з 20 БПЛА мають дефекти 5 БПЛА. Яка ймовірність того, що серед трьох навмання вибраних безпілотних літальних апаратів буде тільки два без дефектів?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{15 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{2 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{C_5^2}{C_{20}^3}$	$\frac{5 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$

3. Переможцями конкурсу стали 15 дівчат та 10 хлопців. Організатори випадковим чином обрали три особи для вручення суперпризів. Яка ймовірність того, що серед них будуть дві дівчини?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2 \cdot C_{10}^2}{C_{25}^3}$	$\frac{C_{15}^2}{C_{25}^3}$	$\frac{15 \cdot C_{10}^2}{C_{25}^3}$	$\frac{C_{10}^2}{C_{25}^3}$	$\frac{10 \cdot C_{15}^2}{C_{25}^3}$

4. В ящику містяться 15 жовтих і 25 синіх кульок. Яка ймовірність того, що три навмання вибрані кульки будуть жовтими?
5. Із 33-ох карток, на кожній з яких написана одна з літер українського алфавіту, навмання вибирають 4 картки. Яка ймовірність того, що ці літери у послідовності вибору утворюють слово «КИЇВ»?
6. Знайдіть імовірність того, що навмання складене із цифр 1, 2, 3, 4, без повторення цифр, чотирицифрове число починається цифрами:
1) 32; 2) 12.
7. Із скриньки, в якій містяться 5 куль, пронумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5, навмання виймають три кулі. Яка ймовірність того, що номери вийнятих куль непарні?

- 8.** У шаховій секції займаються 20 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна скласти команду з 6 учнів і учениць так, щоб до команди ввійшли чотири хлопці та дві дівчини?
- 9.** Студент вивчив для складання заліку з вищої математики 20 запитань із 30. Знайдіть імовірність того, що він складе залік, якщо для цього потрібно правильно відповісти на три навмання витягнуті запитання. Кожне із 30 запитань надруковане на окремій картці.
- 10.** Серед 20 планшетів, що продаються, 6 планшетів мають знижку. Знайдіть імовірність того, що з п'яти куплених планшетів три планшети мають знижку.

Рівень В

- 1.** Зі 100 лотерейних білетів два білети — виграшні. Знайдіть імовірність того, що з 10 придбаних білетів — один білет є виграшним.
- 2.** У скриньці містяться 15 червоних, 10 зелених і 5 синіх кульок, однакових на дотик. Зі скриньки навмання виймають 8 кульок.
Обчисліть ймовірність того, що:
1) чотири кульки червоні, 2 кульки зелені і 2 кульки — сині;
2) шість кульок червоні, одна кулька зелена і одна кулька — синя.
- 3.** У партії зі 100 деталей є 6 бракованих деталей. З цієї партії навмання вибирають 5 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних п'яти деталей дві деталі виявляться бракованими?
- 4.** У грі орлянка одночасно підкидають чотири гральні кубики. Знайдіть імовірність того, що випадуть:
1) три шістки й одна п'ятірка;
2) дві шістки;
3) усі чотири шістки.
- 5.** Дослід полягає в одночасному підкиданні трьох гральних кубиків. Знайдіть імовірність того, що випадуть дві двійки і одна трійка.
- 6.** Для розіграшу призерів підготували 1000 лотерейних білетів, із яких 17 — є виграшними. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних білетів усі виявляться виграшними?
- 7.** На чотирьох картках написані цифри 1, 2, 3, 4. Картки перевернуті та перемішані. Якщо послідовно перевернути три картки та викласти їх у ряд, то яка ймовірність того, що в результаті отримаємо:
1) число 123; 2) число, перша цифра якого дорівнює 3?
- 8.** Десять різних книг розташовані на книжковій полиці. Обчисліть імовірність того, що певні чотири книги будуть знаходитись поряд.
- 9.** Серед 60 акційних шоколадок 8 шоколадок із сюрпризом. Обчисліть імовірність того, що при купівлі трьох шоколадок хоча б одна шоколадка буде з сюрпризом.
- 10.** Монету підкидають 7 разів. Знайдіть імовірність того, що герб випаде 4 рази.
- 11.** На складі є 14 виробів, з яких 10 — стандартних. Знайдіть імовірність того, що серед навмання вибраних п'яти виробів 50% — стандартні вироби.

- 12.** Серед 15-и учнів є 6 спортсменів. Знайдіть імовірність того, що серед відібраних навмання 6-и учнів — 2 спортсмени.

Рівень С

- 1.** У партії зі 100 деталей є 7 бракованих деталей. Із цієї партії навмання вибирають 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних деталей буде не більше двох бракованих?
- 2.** Банк упродовж місяця може видати кредит п'ятьом своїм клієнтам, в той час як замовлення на кредит надійшли від 12 клієнтів першого району та 7 клієнтів другого району. Банк розглядає як тимчасову вимушену міру розігрування випадковим чином п'яти позик серед тих, від кого надійшли замовлення. Знайдіть імовірність того, що позику отримають троє клієнтів першого району.
- 3.** Дано п'ять відрізків, довжини яких становлять 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см. Обчисліть імовірність того, що з трьох навмання вибраних відрізків можна скласти трикутник.
- 4.** Партія з 800 іграшок, серед яких є 4 іграшки з призами, довільним чином розподілена на дві рівні частини так, що кожна з них відправлена двом споживачам. Знайдіть імовірність того, що всі призи дістануться:
- 1) одному споживачу;
 - 2) обоє споживачам порівну.
- 5.** У грі орлянка кидають чотири гральних кубики. Знайдіть імовірність подій:
- 1) на всіх чотирьох кубиках випала різна кількість очок;
 - 2) сумарна кількість очок, що випали, дорівнює 7.
- 6.** У контейнері знаходяться придатні й браковані деталі. Ймовірність того, що навмання вилучені три деталі будуть придатними, дорівнює $\frac{2}{3}$. Яка мінімальна кількість деталей в контейнері?
- 7.** У партії з 400 телевізорів є 6 телевізорів несправних. Партія довільним чином розподілена на дві рівні частини, які відправлені двом оптовим покупцям. Знайдіть імовірність того, що:
- 1) несправні телевізори потраплять до покупців в однаковій кількості;
 - 2) усі несправні телевізори дістануться одному покупцю.
- 8.** Студент вивчив 8 питань із 12. Знайдіть імовірність того, що студент відповість хоча б на два питання із трьох навмання вибраних.
- 9.** До туристичної агенції надійшов запит на бронювання десяти квитків до Варшави, п'яти квитків — до Львова і трьох квитків — до Харкова. Знайдіть імовірність того, що викуплено 6 квитків до Варшави і 4 квитки — до Львова.
- 10.** У компанії працюють 12 співробітників, серед яких 4 — маркетологи. Для реалізації проекту обирають п'ятьох осіб. Знайдіть імовірність того, що серед них буде щонайменше два маркетологи.

Мої враження від уроку.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Жахливі Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Комбінаторика в генетиці — моделювання можливих варіантів передачі ознак від батьків до дітей.
2. Моделювання випадкових подій.
3. Візуалізація комбінаторних «дерев».
4. Ймовірність народження дитини з певною групою крові або резус-фактором (на основі поєднання алельних генів).
5. Ймовірність появи певних комбінацій у киданні гральних кубиків.







