

Урок 5. Математична статистика та її методи

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь про предмет вивчення математичної статистики;
- 2) дізнаєтесь про вибірки та набори експериментальних даних;
- 3) навчитеся складати частотні статистичні таблиці;
- 4) навчитеся складати дискретні ряди розподілу статистичних даних;
- 5) розглянете наочне представлення статистичного розподілу (полігон частот, гістограма).

II. Повторення

- 1.** Кожну грань кубика пофарбували в синій або в жовтий кольори. Ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде синя грань, дорівнює $\frac{1}{3}$. Скільки всього граней кубика пофарбовали в жовтий колір? (ЗНО, 2015 р.).

А	Б	В	Г	Д
п'ять	чотири	три	дві	одна

- 2.** У партії з 20 автомобілів мають дефекти 5 автомобілів. Яка ймовірність того, що серед трьох навмання вибраних автомобілів будуть тільки два без дефектів?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{15 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{2 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$	$\frac{C_5^2}{C_{20}^3}$	$\frac{5 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}$

3. Із трьох хлопців та трьох дівчат, які грають на музичних інструментах, добирають чотирьох учасників до музичного квартету. Скільки всього варіантів такого вибору? (НМТ, 2023 р.).
4. У магазині є 10 видів тортів та 15 видів печива. Скільки всього існує способів вибору або одного торта, або одного виду печива?

III. Предмет вивчення математичної статистики

Статистика та її методи

Означення. Розділ математики, в якому вивчаються та досліджуються кількісні характеристики масових явищ, називається **математичною статистикою** (англ. statistics – статистика). Математична статистика вивчає математичні методи систематизації, обробки та використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Статистику поділяють на **описову** і **пояснювальну**.

Описова статистика займається добором кількісної інформації, необхідної або цікавої для суспільства. Наприклад, спортивна інформація, середньорічна температура в певному регіоні, середній рівень заробітної плати тощо. Для цього обробляються та узагальнюються великі масиви даних.

Пояснювальна статистика з отриманих статистичних результатів робить висновки, будує прогнози.

Предметом вивчення статистики є: кількість і склад населення, трудові ресурси суспільства, їхній розподіл та використання, національне багатство, матеріальний достаток населення, виробництво і розподіл суспільного продукту, освіта, культура, охорона здоров'я тощо.

Складові статистичного методу: масове спостереження, групування даних, обчислення середніх величин, побудова графіків. При цьому першим етапом статистичного дослідження є статистичне спостереження. Найбільш поширене вибіркове спостереження. Тобто, з усієї сукупності роблять відбір одиниць спостереження. Вся сукупність називається **генеральною**, а сукупність одиниць, відібраних для спостереження, називається **вибіркою**.

Вибірка поділяється на:

- 1) випадкову — відбір здійснюється із сукупності жеребкуванням;
- 2) механічну — одиниці вибірки вибираються у певному порядку (наприклад, кожна сота);
- 3) типову — сукупність розбивається на групи і здійснюється відбір представників кожної групи вибірково або механічно.

Статистичні дослідження проводяться за схемою:

- 1) формулюється завдання дослідження, визначається обсяг, місце та час потрібної вибірки;
- 2) здійснюються збирання необхідних даних та їхнє наочне подання;
- 3) проводиться обробка відібраного матеріалу.

IV. Вибірка. Набір експериментальних даних. Вибірка. Ряди розподілу. Наочне представлення статистичного розподілу

Увесь масив експериментальних даних статистичного спостереження формується в таблицях, які називають статистичними таблицями. Статистичні таблиці поділяються на прості, групові та комбінаційні. Прикладами простих таблиць є таблиці, що наведені у підручниках з географії чи з біології.

У математичній статистиці найпоширенішими є частотні та інтервальні таблиці. Наведемо приклади.

Приклад. Швейному підприємству потрібно визначити, скільки чоловічих костюмів і яких розмірів треба пошити. Як це з'ясувати? Для цього робиться вибірка, тобто випадково опитують кілька десятків чи сотень чоловік. Припустимо, що опитали 50 чоловік, розміри костюмів котрих записали в табл. 1.

Таблиця 1

50	42	48	50	46	48	52	44	50	50
50	50	44	54	44	50	50	46	50	48
42	50	50	54	52	54	54	42	48	52
44	48	50	52	50	54	46	52	52	52
48	48	46	48	52	46	50	54	50	46

Для зручності цю вибірку групують (за розмірами) і відмічають, скільки значень досліджуваної ознаки містить кожна група.

Таблиця 2

Розмір костюма	42	44	46	48	50	52	54
Кількість чоловік	3	4	5	9	15	8	6

Такі таблиці називають *частотними*. Числа першого рядка називають *варіантами* або *значеннями досліджуваної ознаки*. Числа другого рядка — *частотами*. Частоти показують, як часто зустрічаються у вибірці ті чи інші значення досліджуваної ознаки.

Означення 1. Рядом розподілу називають ряд чисел, що характеризує розподіл одиниць досліджуваної сукупності. Такий ряд чисел називається *варіаційним рядом*.

Ряди розподілу поділяють на *дискретні* (групування варіант за окремими значеннями ознаки) та *інтервальні* (групування за інтервалами зміни ознаки). Дискретний варіаційний ряд — це перелік варіант вибірки у зростаючому порядку і відповідних їм частот (див. табл. 2). Групування, що здійснено за інтервалами зміни ознаки, називають інтервальним (див. табл. 3).

Приклад. Вибіркові спостереження врожайності жита на площі 1200 га дали результати, які подано за допомогою інтервального групування.

Таблиця 3

Врожайність, ц/га	21 – 23	23 – 25	25 – 27	27 – 29	29 – 31	31 – 33	Всього
Площа, га	100	150	250	300	250	150	1200

Означення 2. Частотою значення ознаки або інтервалу називається кількість елементів сукупності з деякою варіантою, або відповідно кількість елементів сукупності, варіанти яких лежать у даному інтервалі. Позначення: n_i .

Означення 3. Сума всіх частот досліджуваної вибірки називається **об'ємом цієї вибірки**. Позначення: n .

Означення 4. Відношення частоти значення ознаки або інтервалу до об'єму вибірки називається **відносною частотою**, тобто $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Приклад 1. 35 студентів отримали на трьох екзаменах таку кількість балів: 10, 10, 11, 9, 15, 12, 9, 12, 13, 9, 8, 11, 14, 13, 12, 9, 10, 14, 10, 7, 8, 7, 9, 11, 15, 12, 7, 10, 7, 7, 8, 13, 13, 14, 10. Побудуйте дискретний ряд розподілу кількості набраних балів та полігон частот.

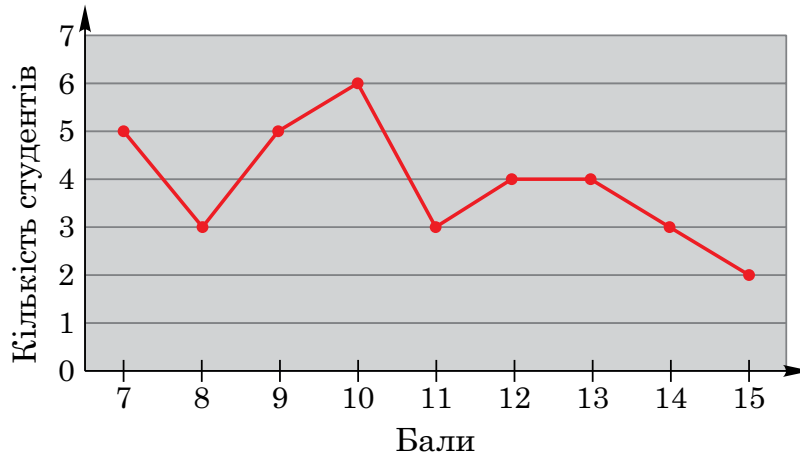
Розв'язання. Побудуємо дискретний статистичний ряд розподілу кількості набраних балів (див. таблицю).

Кількість балів	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість студентів	5	3	5	6	3	4	4	3	2

Для наочного подання статистичного розподілу будують діаграми, графіки, полігони частот, гістограми.

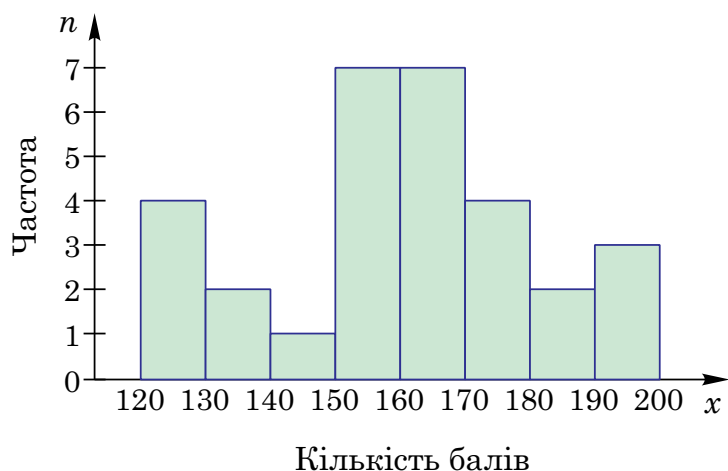
Означення 5. Полігоном частот називається залежність варіант ряду розподілу від частоти або відносної частоти.

Побудуємо полігон частот розподілу кількості студентів від набраних балів (див. задачу 5).



Означення 6. Гістограмою називається послідовність стовпців, кожний з яких спирається на один розрядний інтервал, а висота його відображає кількість частот у цьому інтервалі.

Наприклад, на рисунку побудована гістограма, яка відображає залежність між набраними балами при складанні іспиту НМТ, та кількістю випускників одного класу, які набрали відповідну кількість балів.



Для створення діаграм і графіків можна використати Microsoft Excel, Microsoft Graf або аналогічні програми.

V. Побудова дискретних рядів розподілу статистичних даних

Приклад 2. Проведено опитування серед підлітків із приводу кількості книг, які вони прочитали за літо. Результати опитування:

- 1) 8 підлітків не прочитали жодної книги;
- 2) 12 підлітків прочитали по одній книзі;
- 3) 15 підлітків прочитали по 2 книги;
- 4) 10 підлітків прочитали по 3 книги;
- 7) 5 підлітків прочитали по 4 книги.

Побудуйте статистичний ряд розподілу кількості прочитаних підлітками книг та відносних частот. Який відсоток підлітків із опитаних не прочитали жодної книги?

Розв'язання. Загальна кількість опитаних підлітків: $8 + 12 + 15 + 10 + 5 = 50$.

Відносні частоти обчислимо як відношення частоти окремого значення (варіанти) до загальної кількості елементів. Оскільки сума відносних частот дорівнює 1, то не складно відносні частоти перевести у відсотки (див. таблицю).

Кількість книг, x_i	Кількість підлітків, n_i	Відносна частота, w_i	Відсотки
0	8	0,16	16%
1	12	0,24	24%
2	15	0,3	30%
3	10	0,2	20%
4	5	0,1	10%
Всього	50	1	100%

Таким чином, 16 % опитаних не прочитали жодної книги.

Відповідь. 16 %.

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Менеджер кол-центру мобільного оператора вирішив проаналізувати ефективність роботи операторів. Упродовж однієї години пікових навантажень він зафіксував, скільки разів кожен із 25 операторів змушений був переводити клієнта на фахівця вищого рівня, тобто, скільки складних запитів мав оператор. Отримані дані менеджер записав у ряд: 2, 0, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 4, 2, 2, 1, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 2, 1, 0, 2.

- 1) Побудуйте ряд розподілу даних у вигляді таблиці.
- 2) Обчисліть відносні частоти.
- 3) Побудуйте полігон частот.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Баскетболістка у десяти серіях, по 5 кидків у кожній, влучила в кошик таку кількість разів: 2; 3; 4; 3; 3; 1; 5; 3; 2; 4.

- 1) Заповніть таблицю за даними задачі.
- 2) Побудуйте полігон частот залежності кількості влучань у кошик від кількості серій кидків.

Кількість влучань у серії	1	2	3	4	5
Кількість серій					

- 2.** У крамниці одягу за тиждень були продані чоловічі костюми таких розмірів: 48, 46, 52, 50, 44, 52, 48, 46, 48, 50, 46, 44, 46, 48, 50, 48, 46, 44, 52, 44, 46, 50, 48.

- 1) Складіть дискретний ряд розподілу залежності розмірів костюмів від кількості осіб, які придбали певний розмір.
- 2) Побудуйте полігон частот ряду розподілу.

- 3.** У групі студентів провели опитування про кількість книг, які вони прочитали за рік. Отримані дані, кількість прочитаних книг, зафіксовано в ряду: 0, 2, 1, 5, 3, 2, 4, 3, 3, 1, 0, 5, 4, 2, 3, 0, 2, 1, 5, 3, 2, 4.

- 1) Побудуйте дискретний ряд розподілу прочитаних книг у вигляді таблиці.
- 2) Знайдіть відносні частоти.
- 3) Побудуйте полігон частот.

- 4.** Учитель зафіксував кількість помилок, допущених учнями й ученицями при написанні контрольної роботи з фізики. Результати підрахунків записані в таблиці.

Кількість помилок	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	3	11	6	5	3	2

- 1) Побудуйте полігон частот.
- 2) Побудуйте полігон відносних частот.

- 5.** Побудуйте стовпчасту діаграму найбільших лиманів і озер України за такими даними: Дністровський лиман має площу 360 км², озеро Сасик (Кундук) — 210 км², Молочний лиман — 170 км², Тілігульський лиман — 160 км², озеро Ялпуг — 150 км².

6. Лікарі-дієтологи рекомендують добову потребу в їжі розподіляти на чотири частини: перший сніданок — 25%, другий сніданок — 15%, обід — 45%, вечеря — 15%. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми розподілу добової норми їжі.

Рівень В

1. Під час випробовування літака «Антей» були зафіксовані, залежно від напрямку та швидкості вітру, такі результати швидкості (у км/год) відриву літака від злітної смуги:

235	234	239	238	232	237	239
231	239	235	233	233	240	234
230	232	240	230	234	240	235

Побудуйте варіаційний ряд розподілу цієї вибірки та обчисліть відносні частоти.

2. В Україні дотримуються приблизно такої структури посівних площ: озима пшениця — 23%, інші зернові культури — 22%, кормові культури — 37%, технічні культури — 12%, картопля та овочі — 6%. Побудуйте стовпчасту й кругову діаграми розподілу посівних площ під певні агрокультури.

3. У таблиці наведено розподіл підлітків трьох паралельних класів за зростом.

Зріст, см	150	155	160	165	170	175	180
Кількість підлітків	1	4	5	15	25	8	2

Побудуйте відповідну гістограму і полігон частот даного розподілу.

4. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми розподілу часу учня впродовж доби, якщо на сон він витрачає 35% часу, на навчання — 30%, на заняття спортом — 5%, на допомогу батькам, на відпочинок і дозвілля — 30%.
5. Опитали 20-ох школярів і школярок, які прийшли до кінотеатру, про їхній вік і склали ряд даних:

12	14	15	12	16
13	14	16	15	14
14	15	15	16	14
12	13	15	16	14

- 1) Побудуйте варіаційний ряд цієї вибірки.
- 2) Обчисліть відносні частоти вікового розподілу школярів і школярок.
- 3) Побудуйте гістограму вікового розподілу.

6. Менеджер логістичної компанії зібрав дані витрат палива (у літрах) на 100 км пробігу 20-ох легкових автомобілів (див. таблицю).

8	10	7,5	8	8,5
9	8,5	9	10	9
7,5	9	10	8,5	8
9	8	7,5	10	7,5

- 1) Побудуйте варіаційний ряд цієї вибірки.
- 2) Обчисліть відносні частоти витрат палива.
- 3) Побудуйте полігон частот паливних витрат.
- 4) Побудуйте гістограму витрат палива.

Рівень С

- Головними складовими частинами повітря в атмосфері є азот — 78,08% від загального об'єму повітря, кисень — 20,96% об'єму та інертні гази — 0,94% об'єму. Кількість цих газів у повітрі не змінюється, тому їх називають постійними складовими повітря. Побудуйте секторну діаграму складу повітря. Установіть, який відсоток об'єму займають інші гази.
- Користуючись таблицею розбудови Київського метрополітену, побудуйте полігон частот кількості побудованих станцій за період 1960 – 2013 рр.

Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій
1960	5	1987	28	2010	49
1965	10	1992	35	2011	50
1971	14	2000	40	2012	51
1976	17	2004	43	2013	52
1981	23	2008	46		

- У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі та школярки на Міжнародних математичних олімпіадах у 2013 – 2018 рр.

Рік проведення олімпіади	Кількість здобутих медалей			
	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6
2017	1	2	2	5
2018	4	2	0	6

Побудуйте:

- полігон частот загальної кількості медалей;
- стовпчасту діаграму розподілу загальної кількості медалей за роками;
- кругову діаграму розподілу медалей за видами (золоті, срібні, бронзові) на олімпіаді у 2015 році.

- Віковий склад працівників (у роках) підприємства задано таблицею:

Вік працівника	18 – 28	28 – 38	38 – 48	48 – 58
Кількість працівників	2	10	28	14

Побудуйте полігон частот даного розподілу.

- У продуктових магазинах міста було проведено опитування 50-и навмання вибраних покупців про те, якої жирності молоко вони споживають. Молоко в магазини поставляє один молокозавод. Результати опитування наведено в таблиці.

Жирність молока, %	знежирене молоко	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Уважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації молокозаводу щодо об'єму випуску молока кожного виду, якщо молокозавод має випускати 2000 літрів молока щоденно.

- 6.** Систематизуйте в дискретний ряд розподілу даних про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 чоловіків.

42	39	41	43	40	42	41	44	42	43
44	42	40	38	43	41	42	44	41	43
45	41	42	40	43	39	44	41	43	42
42	43	39	42	40	44	41	42	43	40

Знайдіть частоти та відносні частоти значень розміру взуття.

Взуттєва фабрика планує випускати 20000 пар чоловічого взуття щорічно. Яку кількість пар кожного розміру доцільно випускати?

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке генеральна сукупність. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію поняття вибірки. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію, як будувати частотні таблиці. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як графічно представити статистичні дані. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Дослідіть розподіл за расами населення кожного континенту та населення планети в цілому. Побудуйте відповідні діаграми. Дослідіть зростання населення Землі та динаміку змін його за расами за останні 100 років.
- 2.** Аналіз статистики шкідливих звичок серед молоді.
- 3.** Уподобання, захоплення та поведінкові тенденції старшокласників.
- 4.** Вивчення статистики використання часу учнями/ученицями (на навчання, дозвілля тощо).
- 5.** Статистика в культурі.
- 6.** Статистичний аналіз демографічних процесів у рідному місті чи селі.







