

10

Тема 2.

Відношення. Пропорції. Тотожні перетворення раціональних виразів

Урок 5. Дробово-раціональні вирази. Основна властивість раціонального дроби. Дії над дробово-раціональними виразами

Тип уроку: урок повторення, узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Означення та область допустимих значень дробово-раціональних виразів.
2. Основна властивість раціонального дроби.
3. Скорочення дробово-раціональних виразів.
4. Множення та ділення дробових виразів.
5. Піднесення дробових виразів до степеня (з натуральним та цілим показниками).
6. Додавання та віднімання дробових виразів.
7. Розв'язування вправ на тотожні перетворення дробово-раціональних виразів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії [12 МАО 4.3.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте мотиваційні запитання.
- 2) Повторіть формули скороченого множення (за потреби).
- 3) Запропонуйте учням/ученицям 2 – 3 тестових завдань ЗНО на повторення. Це важливо як для засвоєння матеріалу, так і для мотивації навчатися.
- 4) Сформулюйте дослідницьку задачу без розв'язання. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 5) Акцентуйте увагу на ілюстративних прикладах.
- 6) При поясненні матеріалу наводьте лаконічні означення та приклади. Зразки можливого подання теорії наводяться.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям подивитися короткі відеоуроки (до трьох хвилин), покликання на які наведено на початку повторення теми. Відеоуроки розкривають зміст теоретичних понять. У відеоуроках запропоновано також розв'язання усіх типових практичних завдань з теми. Перегляд відеоуроків може бути частиною домашнього завдання.
- 8) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 9) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 10) Заплануйте час на викладення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування дослідницької задачі та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 11) Після розв'язання дослідницької задачі, продемонструйте учням кілька геометричних фракталів, наприклад, множину Кантора, трикутник Серпінського, сніжинку Коха тощо.
- 12) Як частину домашнього завдання порадьте учнівству дослідити поняття «фрактала» і побудувати власні фрактали.
- 13) Заохочуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми проєктів запропоновані. Захист індивідуальних або групових проєктів можуть бути альтернативою тематичних контрольних робіт.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Навіщо потрібні дробово-раціональні вирази?
- 2) Яке застосування мають дробово-раціональні вирази на практиці?
- 3) Чи зустрічали ви дробово-раціональні вирази в інших навчальних предметах?
- 4) Як застосовувати дробово-раціональні у практичних задачах?
- 5) Які споріднені теми алгебри потрібно знати, щоб виконувати перетворення дробово-раціональних виразів?

II. Повторення (3–4 хв)

1. $-2xy^2 - (3xy^2 - 2x^2y) = \dots$ (ЗНО, додаткова сесія 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$-5xy^2 + 2x^2y$	$-5xy^2 - 2x^2y$	$xy^2 - 2x^2y$	$-6xy^2 + 2x^2y$	$-3xy^2$

2. Спростіть вираз $0,8b^8 : 8b^3$. (ЗНО, 2011 р.).

А	Б	В	Г	Д
$0,1b^3$	$10b^6$	$6,4b^{12}$	$0,1b^5$	$10b^3$

3. Якщо $m = n - 1$, то $7 - n = \dots$ (ЗНО, 2014 р.).

А	Б	В	Г	Д
$m - 8$	$6 - m$	$8 - m$	$m - 6$	$6 + m$

4. Якщо $x^2 - y^2 = 7$ і $3x + 3y = 63$, то $x - y = \dots$

А	Б	В	Г	Д
14	147	-3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У світі навколо нас, важливе значення мають фрактали. Фрактальну будову мають: скупчення хмар, берегові лінії материків, кровоносна й нервові системи людини й тварин, легені людини, мутації клітин (розмноження ракових клітин), бджолині стільники, сніжинки тощо. Фрактали описуються математичними формулами. Найважливішим відношенням у дослідженні фракталів має константа Фібоначчі. Як приклади наведемо два алгебричні фрактали:

$$1) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}; \quad 2) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

1. З'ясуйте, що таке «фрактал»?
2. Як перетворити запропоновані фрактали та з'ясувати їхній зв'язок з константою Фібоначчі?
3. Що називають константою Фібоначчі? Знайдіть інформацію у Вікіпедії.

Відеоурок: «ОДЗ дробово-раціональних виразів»

<https://vm.tiktok.com/ZMhFGSC1r/>



Відеоуроки: «Скорочення дробово-раціональних виразів»

<https://vm.tiktok.com/ZMhFGrc8w/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhFso4Pc/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhFGSfK4/> _____



Відеоуроки: «Множення та ділення дробово-раціональних виразів»

<https://vm.tiktok.com/ZMhFsTUKb/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhFGjfJC/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhFsTaAk/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhj6tWxL/> _____



Відеоуроки: «Додавання та віднімання дробово-раціональних виразів»

<https://vm.tiktok.com/ZMhj6Wd6W/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhj6W1r2/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhj6pdBU/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhj6qjbv/> _____





III. Означення дробово-раціональних виразів та області допустимих значень дробово-раціональних виразів

Раціональний вираз — це вираз, у якому відносно чисел і букв, які входять в даний вираз, не виконується ніяких інших дій, крім дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до цілого степеня.

Означення. Алгебричні вирази, що містять дію ділення на вираз зі змінною називають **дробовими виразами**.

Наприклад: $\frac{2}{b}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{a+b}{c^2}$, $a - \frac{b+c}{d}$ тощо.

Якщо в раціональному виразі замінити букви числами, то отримаємо числовий вираз. У цілих виразах букву можна замінити будь-яким числом. У дробових виразах ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль.

Означення. Область допустимих значень виразу (ОДЗ) з однією змінною називають множину значень змінної, при яких цей вираз має зміст.

Наприклад, якщо у вираз $\frac{2x}{x-5}$, замість змінної x підставити число 5, то отримаємо $\frac{2 \cdot 5}{5-5} = \frac{10}{0}$, що неможливо, оскільки на 0 ділити не можна. Усі інші числа, які ми підставитимемо замість змінної не призводять до ділення на 0. Тому, ОДЗ даного виразу є усі числа, крім 5.

Це можна записати так: $x \in R$, крім 5.

Означення. Заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому на деякій множині, називається **тотожним перетворенням** цього виразу.

Наприклад, оскільки $(2a - 3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$, то вирази $(2a - 3)^2$ і $4a^2 - 12a + 9$ є тотожно рівними, а зазначена рівність — тотожним перетворенням.

При виконанні тотожних перетворень раціональних виразів можливі зміни області допустимих значень (ОДЗ) змінних.

Наприклад, оскільки $\frac{a(3-a)}{a} = \frac{1 \cdot (3-a)}{1} = 3-a$, то вирази $\frac{a(3-a)}{a}$ та $3-a$ є тотожно рівними лише за умови, що $a \neq 0$, оскільки число 0 перетворює знаменник дробового виразу на 0.

Ілюстративні приклади (2–3 хв)

5. (Усно). Знайдіть область допустимих значень виразу $\frac{1}{x} - \frac{3}{x-5}$.

Розв'язання. Число 0 перетворює знаменник першого дробу на 0, а число 5 перетворює знаменник другого дробу на 0. Тому числа 0 і 5 не можна підставляти замість змінної x . Таким чином, $x \in R$, крім $\{0; 5\}$.

Відповідь. $x \in R \setminus \{0; 5\}$.

Примітка. Риска \setminus означає слово «крім». Фігурні дужки використовують на позначення множин.

6. Знайдіть область допустимих значень виразу $\frac{y^2 + 6y + 9}{y^2 + 3y}$.

Розв'язання. Оскільки $y^2 + 3y \neq 0$ або $y(y + 3) \neq 0$, то $y \neq 0$ і $y \neq -3$.

Тому $y \in R$, крім $\{-3; 0\}$. По-іншому: $y \in R \setminus \{-3; 0\}$.

Відповідь. $y \in R \setminus \{-3; 0\}$.

IV. Основна властивість раціонального дробу

Сформулюємо основну властивість раціонального дробу.

Чисельник та знаменник дробового виразу можна помножити або поділити на одне й теж саме число або вираз, який не дорівнює 0.

При цьому:

- множення чисельника та знаменника на число (вираз), застосовують при додаванні й відніманні дробових виразів;
- ділення чисельника та знаменника на число (вираз), застосовують при скороченні дробових виразів.

$$1) \frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C};$$

2) $\frac{A \cdot D}{B \cdot D} = \frac{A}{B}$ — скорочення дробу, де A, B, C, D — багаточлени, причому багаточлени B, C, D тотожно не дорівнюють нулю.

Примітка. Прописними літерами позначають вирази (багаточлени).

Щоб скорочувати дробові вирази треба чисельники та знаменники дробових виразів розкласти на множники.

Ілюстративні приклади

7. Скоротіть дробовий вираз $\frac{8a^4b^5}{24a^3b^7}$.

Розв'язання. Виділимо спільні множники одночленів чисельника й знаменника:

$$\frac{8a^4b^5}{24a^3b^7} = \frac{a \cdot 8a^3b^5}{3b^2 \cdot 8a^3b^5} = \frac{a}{3b^2}.$$

Відповідь. $\frac{a}{3b^2}$.

8. Скоротіть дробовий вираз $\frac{y^2 + 6y + 9}{y^2 + 3y}$.

Розв'язання. $\frac{y^2 + 6y + 9}{y^2 + 3y} = \frac{(y+3)^2}{y(y+3)} = \frac{y+3}{y}$.

Відповідь. $\frac{y+3}{y}$.

V. Множення та ділення раціональних дробів

Спочатку сформулюємо правила множення та ділення раціональних дробів, оскільки ці дії виконувати простіше.

Примітка. Перед тим, як виконувати дії множення, ділення, додавання та віднімання раціональних дробів, потрібно розкласти чисельники та знаменники цих дробових виразів на множники.

Множення і ділення раціональних дробів виконуються за правилами:

1) правило множення: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$;

2) правило ділення: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$.

Особливі випадки ділення дробових виразів

• ділення дробового виразу на дробовий: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$;

• ділення дробового виразу на цілий вираз: $\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{C} = \frac{A}{BC}$;

• ділення цілого виразу на дробовий: $\frac{A}{\frac{B}{C}} = \frac{A}{1} \cdot \frac{C}{B} = \frac{AC}{B}$.

Ілюстративні приклади (до 4 хв)

9. Виконайте множення: $\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$.

Розв'язання. Розкладаємо чисельник першого дробу на множники й записуємо під спільну риску дробу:

$$\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4} = \frac{b(a-b) \cdot 4a}{8b^4} = \frac{4b \cdot a(a-b)}{4b \cdot 2b^3} = \frac{a(a-b)}{2b^3}.$$

Відповідь. $\frac{a(a-b)}{2b^3}$.

Примітка. Важливо записувати добуток чисельників та добуток знаменників під спільною рисою дробу. Це сприяє розумінню, що вирази множаться на вирази, які записуємо в дужках.

10. Виконайте ділення: $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$.

Розв'язання. $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20} = \frac{c-5}{c^2-4c} \cdot \frac{5(c-4)}{c-5} = \frac{c-5}{c(c-4)} \cdot \frac{5(c-4)}{c-5} = \frac{(c-5)5(c-4)}{c(c-4)(c-5)} = \frac{5}{c}$.

Відповідь. $\frac{5}{c}$.

11. Виконайте ділення $(x^2 - 49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

Розв'язання. $\frac{x^2-49y^2}{1} : \frac{x-7y}{x} = \frac{(x-7y)(x+7y)}{1} \cdot \frac{x}{x-7y} = \frac{(x-7y)(x+7y)x}{x-7y} =$

$= \frac{(x+7y)x}{1} = (x+7y)x$.

Відповідь. $(x+7y)x$.

VI. Піднесення раціонального дробу до степеня

1) Піднесення раціонального дробу до натурального показника степеня

виконується за правилом: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$.

2) Піднесення раціонального дробу до цілого показника степеня вико-

нується за правилами: $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n}$, $\left(\frac{A}{B}\right)^0 = 1$, $B \neq 0$.

Ілюстративний приклад

12. Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{10c^7}{3d^6}\right)^3$.

Розв'язання. $\left(-\frac{10c^7}{3d^6}\right)^3 = -\frac{(10c^7)^3}{(3d^6)^3} = -\frac{1000c^{21}}{27d^{18}}$.

Відповідь. $-\frac{1000c^{21}}{27d^{18}}$.

VII. Додавання та віднімання дробових виразів

Правило додавання та віднімання:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} - \frac{M}{N} = \frac{A \cdot D \cdot N + C \cdot B \cdot N - M \cdot B \cdot D}{B \cdot D \cdot N}$$

Перш аніж додавати (або віднімати) дробові вирази, потрібно вяснити, чи можна знаменники цих виразів розкласти на множники. Якщо знаменник або знаменники дробів можна розкласти на множники, то перед тим, як знаходити спільний знаменник потрібно завжди знаменники розкладати на множники.

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

- 13.** Виконайте віднімання дробових виразів: $\frac{10a+6b}{11a^2} - \frac{6b-a}{11a^2}$.

Розв'язання. Спільний знаменник шукати не потрібно, оскільки знаменники дробів однакові. Знак «мінус» відноситься до всього другого дробу, тому його чисельник потрібно брати в дужки:

$$\frac{10a+6b}{11a^2} - \frac{(6b-a)}{11a^2} = \frac{10a+6b-(6b-a)}{11a^2} = \frac{10a+6b-6b+a}{11a^2} = \frac{11a}{11a^2} = \frac{1}{a}.$$

Відповідь. $\frac{1}{a}$.

Примітка. Коли перед дробовим виразом знак «мінус», то чисельник потрібно обов'язково брати в дужки. Тоді ми убезпечимо себе від «класичної» помилки, яку допускають учні й учениці — не змінюють знаки при відніманні.

- 14.** Спростіть вираз $\frac{x^2-16x}{(x-7)^2} + \frac{2x+49}{(7-x)^2}$.

Розв'язання.
$$\frac{x^2-16x}{(x-7)^2} + \frac{2x+49}{(7-x)^2} = \frac{x^2-16x}{(x-7)^2} + \frac{2x+49}{(x-7)^2} = \frac{x^2-16x+2x+49}{(x-7)^2} =$$

$$= \frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2} = 1.$$

Відповідь. 1.

- 15.** Виконайте дії $3n - \frac{9n^2-2}{3n}$.

Розв'язання.
$$\frac{3n}{1} - \frac{(9n^2-2)}{3n} = \frac{3n \cdot 3n}{3n} - \frac{(9n^2-2)}{3n} = \frac{9n^2 - (9n^2-2)}{3n} = \frac{9n^2 - 9n^2 + 2}{3n} = \frac{2}{3n}.$$

Відповідь. $\frac{2}{3n}$.

- 16.** Спростіть вираз $\frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2}$.

Розв'язання.
$$\frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2} = \frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{(7-c)(7+c)} = \frac{c+7}{c-7} - \frac{28c}{(c-7)(c+7)} =$$

$$= \frac{(c+7)(c+7) - 28c}{(c-7)(c+7)} = \frac{c^2 + 14c + 49 - 28c}{(c-7)(c+7)} = \frac{c^2 - 14c + 49}{(c-7)(c+7)} = \frac{(c-7)^2}{(c-7)(c+7)} = \frac{c-7}{c+7}.$$

Відповідь. $\frac{c-7}{c+7}$.

- 17.** Знайдіть значення виразу $\frac{m+4}{m^2-6m+9} \cdot \frac{2m-6}{m^2-16} - \frac{2}{m-4}$, якщо $m = 4,25$. (ЗНО, 2010 р.)

Розв'язання. 1)
$$\frac{m+4}{m^2-6m+9} \cdot \frac{2m-6}{m^2-16} = \frac{(m+4) \cdot 2(m-3)}{(m-3)^2(m-4)(m+4)} = \frac{2}{(m-3)(m-4)}.$$

2)
$$\frac{2}{(m-3)(m-4)} - \frac{2}{m-4} = \frac{2-2(m-3)}{(m-3)(m-4)} = \frac{8-2m}{(m-3)(m-4)} = \frac{-2(m-4)}{(m-3)(m-4)} = -\frac{2}{m-3}.$$

Оскільки $m = 4,25$, то $-\frac{2}{m-3} = -\frac{2}{4,25-3} = -1,6$.

Відповідь. $-1,6$.

VIII. Розв'язування дослідницької задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У світі навколо нас, важливе значення мають фрактали. Фрактальну будову мають: скупчення хмар, берегові лінії материків, кровоносна й нервові системи людини й тварин, легені людини, мутації клітин (розмноження ракових клітин), бджолині стільники, сніжинки тощо. Фрактали описуються математичними формулами. Найважливішим відношенням у дослідженні фракталів має константа Фібоначчі. Як приклади наведемо два алгебричні фрактали:

$$1) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$2) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

1. З'ясуйте, що таке «фрактал»?
2. Як перетворити запропоновані фрактали та з'ясувати їхній зв'язок з константою Фібоначчі?
3. Що називають константою Фібоначчі? Знайдіть інформацію у Вікіпедії.

Розв'язання. Розглянемо фрактал 1).

Позначимо значення ланцюгового дроби як x .

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x.$$

Оскільки ланцюговий дріб «продовжується» до нескінченності, то увесь знаменник, що знаходиться під першим чисельником також дорівнює x .

$$\text{Тоді отримаємо: } 1 + \frac{1}{x} = x.$$

Помножимо ліву й праву частини рівності на $x \neq 0$, отримаємо:

$$x + 1 = x^2 \text{ або } x^2 - x - 1 = 0.$$

Аналогічне квадратне рівняння отримаємо із рівності 2): $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

Нехай $\sqrt{1+x} = x$, тоді при піднесенні до квадрату, отримаємо $x^2 = 1 + x$ або $x^2 - x - 1 = 0$.

Залишилося згадати, як розв'язати квадратне рівняння.

Коефіцієнти квадратного тричлена: $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$.

Знайдемо дискримінант: $D = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$.

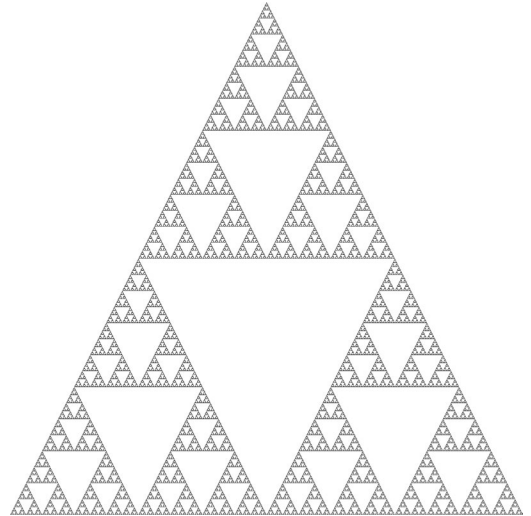
За формулами коренів отримаємо:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Обираємо додатній корінь рівняння: $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Знайдене ірраціональне число називають **константою Фібоначчі**.

Примітка. **Фрактали** — це самоподібні структури. Слово «фрактал» походить від латинського слова «фрактус», тобто «зламаний». Геометричні фрактали — це фігури, які мають скінченні площі (або об'єми) та нескінченні периметри. Наприклад, трикутник Серпінського:



ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. (Усно). Назвіть ОДЗ виразів. Скоротіть дробово-раціональні вирази:

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{3x-3}{x^2-1}; & 2) \frac{5y-5}{y^2-1}; & 3) \frac{x^2-4}{4+2x}; & 4) \frac{y^2-9}{2y+6}; \\
 5) \frac{a-3}{a^2-6a+9}; & 6) \frac{m-2}{m^2-4m+4}; & 7) \frac{9x^2-6x+1}{3x-1}; & 8) \frac{4x^2+4x+1}{2x+1}.
 \end{array}$$

2. Скоротіть дробово-раціональні вирази:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{15a^4b^5}{3a^6b^7}; & 2) \frac{1,5(a^2b)^2}{2,5(a^2b^2)^2}; & 3) \frac{64a^2(b^3)^4}{40a^3(b^4)^2}; \\
 4) \frac{12m^2n^{10}}{18m^6n^5}; & 5) \frac{12m^2n^{10}}{18m^6n^5}; & 6) \frac{14c^{24}d^5}{21c^8d^{10}};
 \end{array}$$

3. Виконайте додавання або віднімання дробово-раціональних виразів:

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{2a-7}{a-3} + \frac{10-3a}{a-3}; & 2) \frac{3b-5}{b-2} + \frac{7-4b}{b-2}; & 3) \frac{5m}{m-n} + \frac{5n}{n-m}; & 4) \frac{8x}{y-x} + \frac{8y}{x-y}; \\
 5) \frac{4-m}{m-3} + \frac{2m-5}{3-m}; & 6) \frac{4n-3}{n-2} + \frac{2n+1}{2-n}; & 7) \frac{6x+7}{2x-1} + \frac{4x+8}{1-2x}; & 8) \frac{7x+5}{1-3x} + \frac{4x+6}{3x-1}.
 \end{array}$$

4. Виконайте множення або ділення дробово-раціональних виразів:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{m^2-mn}{m^2} : \frac{m^2-2mn+n^2}{mn}; & 2) \frac{ab}{ab+3b^2} : \frac{a^2}{a^2+6ab+9b^2}; \\
 3) \frac{2a+2b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}; & 4) \frac{3m-3n}{m^9} \cdot \frac{m^3}{m-n}; \\
 5) \frac{c^2-2c+1}{c+4} \cdot \frac{c+4}{c^2-1}; & 6) \frac{k^2+4k+4}{k-3} \cdot \frac{k-3}{k^2-4}; \\
 7) \frac{a-1}{a+5} \cdot \frac{a+5}{a^2-2a+1}; & 8) \frac{b^2-6b+9}{b-4} \cdot \frac{b-4}{b-3}; \\
 9) \frac{3a+b}{a-2b} \cdot \frac{2a-4b}{9a^2+6ab+b^2}; & 10) \frac{m^2-10mn+25n^2}{18m-3n} \cdot \frac{6m-n}{m-5n}.
 \end{array}$$

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^5 \cdot a^{-7}}{a^{-2}}$;

2) $\frac{a^3 \cdot a^{-9}}{a^{-5}}$;

3) $\frac{24a^4}{b^{-18}} \cdot \frac{2^{-4} \cdot b^{-6}}{a^2}$;

4) $\frac{21c^8}{b^{-14}} \cdot \frac{b^{-6}}{14c^4}$.

5) $\frac{3m}{28n^{-2}} \cdot 14n^6$;

6) $\frac{4c}{45d^{-3}} \cdot 15d^5$;

7) $\frac{7b^{-4}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{21b^5}$;

8) $\frac{5c^{-1}d^3}{3} \cdot \frac{9c^6}{d^{-2}}$.

2. Скоротіть дробово-раціональні вирази:

1) $\frac{a^2 + ab}{ab}$;

2) $\frac{mn - n^2}{nm}$;

3) $\frac{a^2 - 6a + 9}{a - 3}$;

4) $\frac{b^2 + 4b + 4}{b + 2}$;

5) $\frac{3a - a^2}{2a - 6}$;

6) $\frac{b^2 - 2b}{6 - 3b}$;

7) $\frac{a + 8}{a^2 + 16a + 64}$;

8) $\frac{b - 6}{b^2 - 12b + 36}$.

3. Виконайте множення або ділення дробово-раціональних виразів:

1) $\frac{a+1}{2a-3} \cdot \frac{4a^2-9}{a^2+2a+1}$;

2) $\frac{b-2}{7b+5} \cdot \frac{49b^2-25}{b^2-4b+4}$;

3) $\frac{a^2-100}{a^2-10a+25} : \frac{a-10}{a-5}$;

4) $\frac{b-20}{b-8} : \frac{b^2-400}{b^2-16b+64}$;

5) $\frac{5x^3}{y^2} \cdot \frac{y^3}{10x^2} \cdot \frac{4y}{x}$;

6) $\frac{3a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{6a^3} \cdot \frac{2a^3}{b}$.

4. Виконайте додавання або віднімання дробових виразів:

1) $\frac{5-2a}{a} - \frac{6-2b}{b}$;

2) $\frac{4-3x}{x} - \frac{5-3y}{y}$;

3) $\frac{2a^2-3b^2}{ab} + \frac{3b-4a}{a}$;

4) $\frac{3m^2-4n^2}{mn} - \frac{4n-7m}{m}$;

5) $\frac{3a-5b}{a} + \frac{2a^2+5b^2}{ab}$;

6) $\frac{4n-3m}{n} + \frac{n^2+3m^2}{mn}$;

7) $2 - \frac{3b+2a}{a}$;

8) $3 - \frac{3c+4d}{c}$;

9) $\frac{2a^2}{a-6} - 2a$;

10) $\frac{6b^2}{2b+3} - 3b$;

11) $\frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$;

12) $\frac{4b-c}{b^2-c^2} + \frac{1}{b-c}$.

5. Знайдіть значення виразу $\frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x = 3$.

6. Спростіть вираз $(m^2 - 16n^2) : \frac{m+4n}{m}$ і знайдіть його значення, якщо $m = 1$, $n = -2$.

7. Знайдіть значення виразу $\frac{2a}{a^2-b^2} - \frac{1}{a+b}$, якщо $a = -3,73$ і $b = 0,27$. (ЗНО, 2006 р.).

8. Обчисліть значення виразу $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, якщо $a = 10,2$; $b = -0,2$. (ЗНО, 2013 р.).

9. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, який тотожно дорівнює заданому (А–Д).

Вираз

1 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + c$

2 $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - b$

3 $a = \frac{1}{c} - b$

4 $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} - a$

Тотожно йому рівний вираз

А $c = \frac{1}{a+b}$

Б $c = \frac{b}{1+ab}$

В $c = \frac{b-a}{ab}$

Г $c = \frac{a}{1-ab}$

Д $c = \frac{a-b}{ab}$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10. Спростіть вираз $\left(\frac{2x}{x^2-2x+1} + \frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{x^3-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{1-x}$.

11. Знайдіть значення виразу $\frac{2y-1}{2y} - \frac{2y}{2y-1} - \frac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y = -2\frac{3}{7}$.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{(b-y)^2}{2y} \cdot \left(\frac{3y}{b^2-y^2} + \frac{y}{(y-b)^2}\right) + \frac{3y}{b+y}$.

Рівень С

1. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, який тотожно дорівнює заданому (А–Д).

Вираз

1 $\frac{8x^2}{x-3y} : \frac{6x^3}{x^2-9y^2} \cdot \frac{3x}{4x+12y}$

2 $\left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x-8}{x^2-10x+25}\right) : \frac{x-20}{(x-5)^2}$

3 $\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\right) \cdot \frac{1-x}{1+x^2}$

4 $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2+1}{1-x^2} - \frac{x}{1+x}\right) \cdot \frac{1}{x+1}$

Тотожно йому рівний вираз

А $\frac{1}{x+1}$

Б $\frac{1}{x-1}$

В 1

Г $-\frac{2}{x+5}$

Д $\frac{2}{x+5}$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Відомо, що $y + \frac{1}{y} = 6$. Знайдіть $y^2 + \frac{1}{y^2}$.

3. Знайдіть значення виразу $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$, якщо $4m+3n=8$.

4. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{a^2}{4b^3} + \frac{2}{a}\right) : \left(\frac{a}{2b^2} - \frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) : \frac{(a-2b)^2 + 8ab}{4 + \frac{2a}{b}}$ є додатним

при всіх допустимих значеннях змінних.

5. Знайдіть значення виразу $x^3 - \frac{1}{x^3}$, якщо $x - \frac{1}{x} = 4$.
6. Відомо, що $y = \frac{1-n}{n}$, $x = \frac{n}{2-n}$. Виразіть y через x .

Х. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що я вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Що таке фрактали і як фрактали співвідносяться із константою Фібоначчі?
2. Взаємозв'язок між фракталами, рядом чисел Фібоначчі та точкою «золотого перерізу».
3. Приклади геометричних фракталів та їхня побудова.
4. Застосування дробово-раціональних виразів у фізиці.
5. Застосування дробово-раціональних виразів в архітектурі та в будівництві.
6. Моделювання практичних задач за допомогою дробово-раціональних виразів.