10 Тема 2. Відношення. Пропорції. Тотожні перетворення раціональних виразів

Урок 6. Урок – практикум. Тотожні перетворення дробово-раціональних виразів

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви повторите:

1) формули скороченого множення, властивості степенів;

2) методи розкладу багаточленів на множники;

3) множення та ділення дробово-раціональних виразів;

4) піднесення до степеня дробово-раціональних виразів;

5) додавання та віднімання дробово-раціональних виразів;

6) тотожні перетворення дробово-раціональних виразів.

II. Повторення

1. Формули скороченого множення

1. Квадрат суми: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Квадрат різниці: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
4. Різниця кубів: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
5. Сума кубів: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
6. Куб суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
7. Куб різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

2. Властивості степенів з цілими показниками

Нехай a, b — дійсні числа, m, n — натуральні числа. Тоді виконуються рівності 1 – 8.

1. Правило множення степенів з однаковими основами.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. Правило піднесення добутку чисел до степеня.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ або $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

3. Правило ділення степенів з однаковими основами.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$.

4. Правило піднесення дробу (дробового виразу) до степеня.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

5. Правило піднесення степеня до степеня.

$(a^m)^n = a^{mn}$.

6. $a^0 = 1$.

7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3. Методи розкладу багаточленів на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- використання формул скороченого множення;
- групування і винесення за дужки спільного множника.
- виділення повного квадрата;
- використання формули розкладу квадратного тричлена на множники;
- використання теореми Безу.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У таблиці наведено тарифи на доставку вантажу за маршрутом N службою кур'єрської доставки. Будь-яку кількість вантажів можна об'єднувати в один вантаж, маса якого дорівнює сумі мас об'єднаних вантажів. Жодних додаткових платежів за об'єднання вантажів чи доставку вантажу, крім указаних у таблиці, немає. **(ЗНО, 2019 р.).**

Маса вантажу, кг	*Вартість доставки вантажу, грн*
до 50	100
51 – 75	110
76 – 100	205
101 – 150	310

1. За яку найменшу суму грошей P (у грн) можна доставити цією службою за маршрутом N три вантажі, маси яких становлять 31 кг, 36 кг та 40 кг?

2. Скільки відсотків становить P від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен із них відправляти окремо?

III. Самостійна робота

1. $0{,}4x^2 \cdot 5x^3 = \ldots$ **(ЗНО, 2016 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$2x^5$	$20x^5$	$2x^6$	$0{,}2x^6$	$0{,}2x^5$

2. Обчисліть значення виразу $25 - 2a - 2b$, якщо $a + b = 6$. **(Пробне ЗНО, 2017 р.).**

А	Б	В	Г	Д
1	23	21	13	19

3. Якщо $a = 1 - \frac{b}{c}$, то $b = \ldots$ **(ЗНО, 2009 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$c(1-a)$	$c(a-1)$	$\frac{c}{1-a}$	$\frac{1-a}{c}$	$1-ac$

4. $\frac{3x^2y}{9xy^3} = \ldots$ **(Пробне ЗНО, 2015 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$27x^3y^4$	$\frac{x^3y^4}{3}$	$\frac{3x}{y^2}$	$\frac{x^3}{3y^4}$	$\frac{x}{3y^2}$

5. Спростіть вираз $\frac{3x+12}{x^2-16}$. **(ЗНО, 2009 р.).**

А	Б	В	Г	
$\frac{3}{4-x}$	$\frac{3}{x-4}$	$-\frac{3}{x+4}$	$\frac{3}{x+4}$	$\frac{1}{x-4}$

6. Розкладіть на множники вираз $(a-1)^2-(b-1)^2$. **(ЗНО, 2016 р., додаткова сесія).**

А	Б	В	Г	Д
$(a-b)(a+b)$	$(a-b)(a+b+2)$	$(a-b)^2$	$(a-b)(a+b-2)$	$(a+b)(a-b-2)$

7. Спростіть вираз $\dfrac{a^2-1}{1-\dfrac{1}{a}}$. **(ЗНО, 2014 р., додаткова сесія).**

А	Б	В	Г	Д
$a(a-1)$	$-a^3$	$-a(a+1)$	$\dfrac{a+1}{a}$	$a(a+1)$

8. Якщо $a<7$, то $\left|\dfrac{a^2-49}{a+7}\right|=\ldots$ **(ЗНО, 2014 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$a-7$	$a+7$	$7-a$	0	$7+a$

9. Спростіть вираз $\dfrac{a}{b(a-b)}-\dfrac{b}{a(a-b)}$. **(ЗНО, 2016 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{a+b}{ab}$	$\dfrac{1}{ab}$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a-b}{ab}$	0

10. Установіть відповідність між виразом (1–4) та значенням виразу (А–Д), якщо $x=0{,}5$. **(ЗНО, 2011 р.).**

Вираз

1 $\dfrac{x^2-9}{3+x}$

2 $(x-5)^2+5(2x-5)$

3 $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

4 $\dfrac{3x-6}{8x}\cdot\dfrac{x}{x^2-4x+4}$

Значення виразу

А 2,5

Б 1,5

В –2,5

Г 0,25

Д –0,25

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

11. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1 Якщо $m = 4$, то $\frac{m-1}{m^2-9} \cdot \frac{m+3}{m-1} =$

2 Якщо $x = 2$, то $\frac{x+1}{3x} : \frac{x^2+2x+1}{9x^2} =$

3 Якщо $a = 3$, то $\frac{5a^2}{a^2-1} : \frac{a}{a+1} =$

Закінчення речення

А 7,5.
Б 1.
В 6,5.
Г 2.
Д 3.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

12. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, що йому тотожно дорівнює (А–Д), якщо $a \neq 0$; $a \neq 1$; $a \neq -1$. **(Пробне ЗНО, 2013 р.).**

Вираз

1 $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a}$

2 $a^2 + \frac{a^3-1}{1-a}$

3 $\frac{1-a}{a} : \frac{a^2-1}{a}$

4 $\frac{a-2}{a-1} - 1$

Тотожно рівний вираз

А $a - 1$
Б $-a - 1$
В $-\frac{1}{a+1}$
Г $-\frac{1}{a-1}$
Д $a + 1$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

IV. Розв'язування завдань на тотожні перетворення дробово-раціональних виразів

Приклад 1. Обчисліть значення виразу $\frac{10a+b}{b^2-4a^2}+\frac{4a+2b}{b^2+4ab+4a^2}$ при $a = 0{,}25$, $b = 2{,}5$. **(ЗНО, 2015 р.).**

Розв'язання. **I *спосіб.*** Розкладемо знаменники дробових виразів на множники і знайдемо спільний знаменник:

$$\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{4a+2b}{(b+2a)^2}=\frac{(10a+b)(b+2a)+(4a+2b)(b-2a)}{(b-2a)(b+2a)^2}=$$

$$=\frac{10ab+20a^2+b^2+2ab+4ab-8a^2+2b^2-4ab}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{12ab+12a^2+3b^2}{(b-2a)(b+2a)^2}=$$

$$=\frac{3(4ab+4a^2+b^2)}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{3(b+2a)^2}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{3}{b-2a}.$$

Якщо $a = 0{,}25$, $b = 2{,}5$, то $\frac{3}{b-2a}=\frac{3}{2{,}5-2\cdot 0{,}25}=\frac{3}{2{,}5-0{,}5}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

II *спосіб.* Розкладемо знаменники дробових виразів на множники і розкладемо на множники чисельник другого дробового виразу:

$$\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{2(2a+b)}{(b+2a)(b+2a)}=\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{2}{b+2a}=\frac{10a+b+2(b-2a)}{(b-2a)(b+2a)}=$$

$$=\frac{10a+b+2b-4a}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{6a+3b}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{3(2a+b)}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{3}{b-2a}.$$

Далі, аналогічно попередньому.

Відповідь. 1,5.

V. Розв'язування практичної задачі

Задача. У таблиці наведено тарифи на доставку вантажу за маршрутом N службою кур'єрської доставки. Будь-яку кількість вантажів можна об'єднувати в один вантаж, маса якого дорівнює сумі мас об'єднаних вантажів. Жодних додаткових платежів за об'єднання вантажів чи доставку вантажу, крім указаних у таблиці, немає. **(ЗНО, 2019 р.).**

Маса вантажу, кг	*Вартість доставки вантажу, грн*
до 50	100
51 – 75	110
76 – 100	205
101 – 150	310

1. За яку найменшу суму грошей P (у грн) можна доставити цією службою за маршрутом N три вантажі, маси яких становлять 31 кг, 36 кг та 40 кг?

2. Скільки відсотків становить P від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен із них відправляти окремо?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $\frac{4a^6}{b^8}:(8a^3b^2)$;

2) $\frac{4m^3}{3n^2}\cdot\frac{6n^4}{2m}:\frac{2m^2n^2}{n^3}$;

3) $\frac{3x^3y^5}{4z^3}\cdot\frac{8yz^5}{9x^6}:\frac{2y^6z^2}{3x^3}$;

4) $\frac{8x^2}{x-3y}:\frac{6x^3}{x^2-9y^2}\cdot\frac{3x}{4x+12y}$.

2. Якщо $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, то $a=\ldots$

3. Обчисліть значення виразу $(m^2-16n^2):\frac{m+4n}{m}$, якщо $m=1$, $n=-2$.

4. Спростіть вираз:

1) $\frac{a-\frac{b^2}{a}}{b-\frac{a^2}{b}}$;

2) $\frac{\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}}$;

3) $\frac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}}$;

4) $\frac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}}$.

5. Спростіть вираз $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$ та знайдіть його значення, якщо $a=2$.

6. Спростіть вираз $\left(\frac{3a^{-5}}{b^{-1}}\right)^{-2}\cdot 27a^{-10}b^2$.

7. Зведіть вираз $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3}\cdot\left(-6a^2b^9\right)^{-2}$ до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником.

8. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, що йому тотожно дорівнює (А–Д).

Вираз	*Тотожно йому рівний вираз*
1 $\frac{ax-bx}{a}:(a-b)$	**А** $\frac{2}{b-3}$
2 $\frac{2}{b+1}-\frac{b-1}{b(b+1)}$	**Б** $\frac{a}{x}$
3 $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b+3}{b-3}+\frac{b-3}{b+3}\right)$	**В** $\frac{1}{1+b}$
4 $\left(\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1+b}-1\right)\cdot\frac{1-b}{1+b^2}$	**Г** $\frac{x}{a}$
	Д $\frac{1}{b}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Рівень B

1. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$;

3) $\dfrac{m^{-2}-n^{-2}}{m^{-1}+n^{-1}}$;

4) $\left(\dfrac{5m^{-4}}{2n^{-1}}\right)^{-3}\cdot 125m^{-10}n^{2}$.

2. Якщо $x+y=5$ і $xy=6$, то $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=?$

3. Обчисліть значення виразу $\dfrac{xy-2y+x-2}{x^2-4}$, якщо $x=3$, $y=1{,}5$.

4. Знайдіть значення виразу $\dfrac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\dfrac{c+3}{8-c^3}$, якщо $c=-3$.

5. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$.

6. Доведіть, що значення виразу не залежить від буквених значень:

1) $\dfrac{a}{a+2}-\left(\dfrac{a}{a^2-4}+\dfrac{a}{a^2-4a+4}\right):\dfrac{2a}{(2-a)^2}$;

2) $\dfrac{(m-n)^2}{m}\cdot\left(\dfrac{m}{(n-m)^2}+\dfrac{m}{m^2-n^2}\right)+\dfrac{2n}{m+n}$;

3) $\left(\dfrac{a}{(b-a)^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}\right)\cdot\dfrac{(a-b)^2}{a}+\dfrac{3a+b}{a+b}$.

7. Густина міді дорівнює $8{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3. Знайдіть масу мідної плити завдовжки $2{,}5\cdot 10^{-1}$ м, ширина якої становить 12 см, а висота дорівнює 0,02 м. Для обчислення маси знайдіть відповідну формулу в довіднику.

8. Спростіть вираз $\dfrac{b^{-1}+3c^{-1}}{c^{-2}}\cdot\dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1}+3b^{-1}c^{-2}}$.

Рівень C

1. Відомо, що $x+\dfrac{1}{x}=-2$. Обчисліть $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

2. Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^3+b^3}-\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}\right):\dfrac{2ab}{a^2-ab+b^2}$.

3. Знайдіть значення виразу $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\dfrac{x}{y}=2$.

4. Спростіть вираз $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$.

5. Відомо, що $\frac{x-y}{x+y}=\frac{12}{13}$. Знайдіть $\frac{x^2}{y^2}$.

6. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{a^2}{4b^3}+\frac{2}{a}\right):\left(\frac{a}{2b^2}-\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right):\frac{(a-2b)^2+8ab}{4+\frac{2a}{b}}$ є додатним при всіх допустимих значеннях змінних.

7. Спростіть вираз $\left(b^{-1}-\frac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\frac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$. Відповідь запишіть у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

8. Доведіть, що значення виразу $\frac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y}\cdot\frac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}-1}:\frac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1}$ не залежить від значень змінних.

Рефлексія

Мої враження від уроку

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Жахливі Чудові

Поради собі для наступного уроку . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .