10 Тема 2. Відношення. Пропорції. Тотожні перетворення раціональних виразів

Урок 6. Урок – практикум. Тотожні перетворення дробово-раціональних виразів

Тип уроку: узагальнення та систематизація знань.

План уроку

1. Повторення формул скороченого множення, властивостей степенів, методів розкладу багаточленів на множники.
2. Розв'язування тестових завдань ЗНО. Самостійна робота.
3. Розв'язування завдань на тотожні перетворення дробово-раціональних виразів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 МАО 1.1.1–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії [12 МАО 4.3.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Повторіть основні теоретичні відомості: формули скороченого множення, властивості степенів, методи розкладу багаточленів на множники, виконання дій над дробово-раціональними виразами.

2) Проведіть самостійну роботу. Запропонуйте учням/ученицям розв'язати завдання ЗНО. Виконайте перевірку розв'язання завдань самостійної роботи.

3) Сформулюйте задачу ЗНО без розв'язання. Розв'язання задачі проведіть у вигляді групової роботи наприкінці уроку.

4) Наведіть ілюстративні приклади складніших тотожних перетворень дробово-раціональних виразів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

5) Запропонуйте учням/ученицям проаналізувати й розв'язати задачу ЗНО. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп.

6) Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичної задачі.

7) Запропонуйте учням/ученицям, з урахуванням їхнього сприйняття теми, розв'язувати завдання попереднього уроку. Формуйте в учнів/учениць практичні навики розв'язування тренувальних вправ і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Запропонуйте учням/ученицям самостійно розв'язувати тренувальні вправи за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи важливо знати формули скороченого множення для перетворення алгебричних виразів?

2) Наскільки важливі степені та їхні властивості для застосування у фізиці, хімії, математиці?

3) Чи обов'язково знати методи розкладу багаточленів на множники?

4) Наскільки важливі знання про дробово-раціональні вирази та їхнє перетворення для подальшого вивчення математики, фізики, природничих предметів?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Формули скороченого множення

1. Квадрат суми: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Квадрат різниці: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
4. Різниця кубів: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
5. Сума кубів: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
6. Куб суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
7. Куб різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

2. Властивості степенів з цілими показниками

Нехай a, b — дійсні числа, m, n — натуральні числа. Тоді виконуються рівності 1 – 8.

1. Правило множення степенів з однаковими основами.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. Правило піднесення добутку чисел до степеня.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ або $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

3. Правило ділення степенів з однаковими основами.

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$.

4. Правило піднесення дробу (дробового виразу) до степеня.

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

5. Правило піднесення степеня до степеня.

$(a^m)^n = a^{mn}$.

6. $a^0 = 1$.

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3. Методи розкладу багаточленів на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- використання формул скороченого множення;
- групування і винесення за дужки спільного множника.
- виділення повного квадрата;
- використання формули розкладу квадратного тричлена на множники;
- використання теореми Безу.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У таблиці наведено тарифи на доставку вантажу за маршрутом N службою кур'єрської доставки. Будь-яку кількість вантажів можна об'єднувати в один вантаж, маса якого дорівнює сумі мас об'єднаних вантажів. Жодних додаткових платежів за об'єднання вантажів чи доставку вантажу, крім указаних у таблиці, немає. **(ЗНО, 2019 р.)**.

Маса вантажу, кг	*Вартість доставки вантажу, грн*
до 50	100
51 – 75	110
76 – 100	205
101 – 150	310

1. За яку найменшу суму грошей P (у грн) можна доставити цією службою за маршрутом N три вантажі, маси яких становлять 31 кг, 36 кг та 40 кг?

2. Скільки відсотків становить P від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен із них відправляти окремо?

III. Самостійна робота (15–20 хв)

1. $0{,}4x^2 \cdot 5x^3 = \ldots$ **(ЗНО, 2016 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$2x^5$	$20x^5$	$2x^6$	$0{,}2x^6$	$0{,}2x^5$

2. Обчисліть значення виразу $25 - 2a - 2b$, якщо $a + b = 6$. **(Пробне ЗНО, 2017 р.).**

А	Б	В	Г	Д
1	23	21	13	19

3. Якщо $a = 1 - \dfrac{b}{c}$, то $b = \ldots$ **(ЗНО, 2009 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$c(1-a)$	$c(a-1)$	$\dfrac{c}{1-a}$	$\dfrac{1-a}{c}$	$1-ac$

4. $\dfrac{3x^2y}{9xy^3} = \ldots$ **(Пробне ЗНО, 2015 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$27x^3y^4$	$\dfrac{x^3y^4}{3}$	$\dfrac{3x}{y^2}$	$\dfrac{x^3}{3y^4}$	$\dfrac{x}{3y^2}$

5. Спростіть вираз $\dfrac{3x+12}{x^2-16}$. **(ЗНО, 2009 р.).**

А	Б	В	Г	
$\dfrac{3}{4-x}$	$\dfrac{3}{x-4}$	$-\dfrac{3}{x+4}$	$\dfrac{3}{x+4}$	$\dfrac{1}{x-4}$

6. Розкладіть на множники вираз $(a-1)^2-(b-1)^2$. **(ЗНО, 2016 р., додаткова сесія).**

А	Б	В	Г	Д
$(a-b)(a+b)$	$(a-b)(a+b+2)$	$(a-b)^2$	$(a-b)(a+b-2)$	$(a+b)(a-b-2)$

7. Спростіть вираз $\dfrac{a^2-1}{1-\dfrac{1}{a}}$. **(ЗНО, 2014 р., додаткова сесія).**

А	Б	В	Г	Д
$a(a-1)$	$-a^3$	$-a(a+1)$	$\dfrac{a+1}{a}$	$a(a+1)$

8. Якщо $a<7$, то $\left|\dfrac{a^2-49}{a+7}\right| = \ldots$ **(ЗНО, 2014 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$a-7$	$a+7$	$7-a$	0	$7+a$

9. Спростіть вираз $\dfrac{a}{b(a-b)}-\dfrac{b}{a(a-b)}$. **(ЗНО, 2016 р.).**

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{a+b}{ab}$	$\dfrac{1}{ab}$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a-b}{ab}$	0

10. Установіть відповідність між виразом (1–4) та значенням виразу (А–Д), якщо $x=0{,}5$. **(ЗНО, 2011 р.).**

Вираз

1 $\dfrac{x^2-9}{3+x}$

2 $(x-5)^2+5(2x-5)$

3 $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

4 $\dfrac{3x-6}{8x}\cdot\dfrac{x}{x^2-4x+4}$

Значення виразу

А 2,5

Б 1,5

В –2,5

Г 0,25

Д –0,25

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

11. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1 Якщо $m = 4$, то $\dfrac{m-1}{m^2-9} \cdot \dfrac{m+3}{m-1} =$

2 Якщо $x = 2$, то $\dfrac{x+1}{3x} : \dfrac{x^2+2x+1}{9x^2} =$

3 Якщо $a = 3$, то $\dfrac{5a^2}{a^2-1} : \dfrac{a}{a+1} =$

Закінчення речення

А 7,5.
Б 1.
В 6,5.
Г 2.
Д 3.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

12. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, що йому тотожно дорівнює (А–Д), якщо $a \neq 0$; $a \neq 1$; $a \neq -1$. **(Пробне ЗНО, 2013 р.).**

Вираз

1 $\dfrac{a}{a+1} \cdot \dfrac{a^2-1}{a}$

2 $a^2 + \dfrac{a^3-1}{1-a}$

3 $\dfrac{1-a}{a} : \dfrac{a^2-1}{a}$

4 $\dfrac{a-2}{a-1} - 1$

Тотожно рівний вираз

А $a - 1$
Б $-a - 1$
В $-\dfrac{1}{a+1}$
Г $-\dfrac{1}{a-1}$
Д $a + 1$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Відповіді до тестових завдань

1. А.
2. Г.
3. А.
4. Д.
5. Б.
6. Г.
7. Д.
8. В.
9. А.
10. 1 – В, 2 – Г, 3 – Б, 4 – Д.
11. 1 – Б, 2 – Г, 3 – А.
12. 1 – А, 2 – Б, 3 – В, 4 – Г.

IV. Розв'язування завдань на тотожні перетворення дробово-раціональних виразів

Ілюстративні приклади (5–8 хв)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{10a+b}{b^2-4a^2}+\frac{4a+2b}{b^2+4ab+4a^2}$ при $a=0{,}25$, $b=2{,}5$. **(ЗНО, 2015 р.).**

Розв'язання. **I *спосіб.*** Розкладемо знаменники дробових виразів на множники і знайдемо спільний знаменник:

$$\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{4a+2b}{(b+2a)^2}=\frac{(10a+b)(b+2a)+(4a+2b)(b-2a)}{(b-2a)(b+2a)^2}=$$

$$=\frac{10ab+20a^2+b^2+2ab+4ab-8a^2+2b^2-4ab}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{12ab+12a^2+3b^2}{(b-2a)(b+2a)^2}=$$

$$=\frac{3(4ab+4a^2+b^2)}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{3(b+2a)^2}{(b-2a)(b+2a)^2}=\frac{3}{b-2a}.$$

Якщо $a=0{,}25$, $b=2{,}5$, то $\frac{3}{b-2a}=\frac{3}{2{,}5-2\cdot 0{,}25}=\frac{3}{2{,}5-0{,}5}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

II *спосіб.* Розкладемо знаменники дробових виразів на множники і розкладемо на множники чисельник другого дробового виразу:

$$\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{2(2a+b)}{(b+2a)(b+2a)}=\frac{10a+b}{(b-2a)(b+2a)}+\frac{2}{b+2a}=\frac{10a+b+2(b-2a)}{(b-2a)(b+2a)}=$$

$$=\frac{10a+b+2b-4a}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{6a+3b}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{3(2a+b)}{(b-2a)(b+2a)}=\frac{3}{b-2a}.$$

Далі, аналогічно попередньому.

Відповідь. 1,5.

2. Доведіть тотожність $\dfrac{\frac{a}{4}-\frac{4}{a}}{\frac{a}{4}+1}+\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{a}{4}}{\frac{3a^2}{4}-\frac{11a^2}{16}}=1.$

Розв'язання. Виконаємо перетворення із лівою частиною тотожності:

$$\frac{\frac{a}{4}-\frac{4}{a}}{\frac{a}{4}+1}+\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{4}}{\frac{3a^2}{4}-\frac{11a^2}{16}}=\frac{\frac{a^2-16}{4a}}{\frac{a+4}{4}}+\frac{\frac{2a-a}{4}}{\frac{12a^2-11a^2}{16}}=\frac{(a-4)(a+4)}{4a}\cdot\frac{4}{a+4}+\frac{a}{4}\cdot\frac{16}{a^2}=$$

$$=\frac{a-4}{a}+\frac{4}{a}=\frac{a-4+4}{a}=\frac{a}{a}=1.$$

Оскільки 1 = 1, то тотожність доведено.

Відповідь. Тотожність доведено.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Задача. У таблиці наведено тарифи на доставку вантажу за маршрутом N службою кур'єрської доставки. Будь-яку кількість вантажів можна об'єднувати в один вантаж, маса якого дорівнює сумі мас об'єднаних вантажів. Жодних додаткових платежів за об'єднання вантажів чи доставку вантажу, крім указаних у таблиці, немає. **(ЗНО, 2019 р.)**.

Маса вантажу, кг	*Вартість доставки вантажу, грн*
до 50	100
51 – 75	110
76 – 100	205
101 – 150	310

1. За яку найменшу суму грошей P (у грн) можна доставити цією службою за маршрутом N три вантажі, маси яких становлять 31 кг, 36 кг та 40 кг?

2. Скільки відсотків становить P від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен із них відправляти окремо?

Розв'язання.

1. Аналізуємо таблицю.

Вантаж, масою 40 кг відправлятимемо окремо.

Вантажі, масами 31 кг та 36 кг, об'єднаємо в один, маса якого не перевищує 75 кг.

Тоді, $P = 100 + 110 = 210$ (грн) — мінімальна сума коштів, яку потрібно заплатити за доставку трьох вантажів.

2. Якщо кожен вантаж відправляти окремо, то сума коштів становитиме:

$3 \cdot 100 = 300$ (грн).

Тоді: $\dfrac{210}{300}\cdot 100\% = \dfrac{7}{10}\cdot 100\% = 70\%.$

Отже, P становить 70% від загальної суми грошей за доставку цих трьох вантажів, якщо кожен з них відправляти окремо.

Відповідь. 1. 210 грн. 2. 70%.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4a^6}{b^8} : (8a^3b^2)$;

2) $\dfrac{4m^3}{3n^2} \cdot \dfrac{6n^4}{2m} : \dfrac{2m^2n^2}{n^3}$;

3) $\dfrac{3x^3y^5}{4z^3} \cdot \dfrac{8yz^5}{9x^6} : \dfrac{2y^6z^2}{3x^3}$;

4) $\dfrac{8x^2}{x-3y} : \dfrac{6x^3}{x^2-9y^2} \cdot \dfrac{3x}{4x+12y}$.

2. Якщо $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, то $a = \ldots$

3. Обчисліть значення виразу $(m^2 - 16n^2) : \dfrac{m+4n}{m}$, якщо $m = 1$, $n = -2$.

4. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a - \dfrac{b^2}{a}}{b - \dfrac{a^2}{b}}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b} - \dfrac{a-b}{a}}$;

3) $\dfrac{a - \dfrac{a^2}{a+1}}{a - \dfrac{a}{a+1}}$;

4) $\dfrac{a - \dfrac{6a-9}{a}}{1 - \dfrac{3}{a}}$.

5. Спростіть вираз $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1} \cdot \left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2$ та знайдіть його значення, якщо $a = 2$.

6. Спростіть вираз $\left(\dfrac{3a^{-5}}{b^{-1}}\right)^{-2} \cdot 27a^{-10}b^2$.

7. Зведіть вираз $\left(-\dfrac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot \left(-6a^2b^9\right)^{-2}$ до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником.

8. Установіть відповідність між заданим виразом (1–4) та виразом, що йому тотожно дорівнює (А–Д).

Вираз	*Тотожно йому рівний вираз*
1 $\dfrac{ax-bx}{a} : (a-b)$	**А** $\dfrac{2}{b-3}$
2 $\dfrac{2}{b+1} - \dfrac{b-1}{b(b+1)}$	**Б** $\dfrac{a}{x}$
3 $\dfrac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\dfrac{b+3}{b-3} + \dfrac{b-3}{b+3}\right)$	**В** $\dfrac{1}{1+b}$
4 $\left(\dfrac{1}{1-b} + \dfrac{1}{1+b} - 1\right) \cdot \dfrac{1-b}{1+b^2}$	**Г** $\dfrac{x}{a}$
	Д $\dfrac{1}{b}$

	А	Б	В	Г	Д
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐

Рівень В

1. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$;

3) $\dfrac{m^{-2}-n^{-2}}{m^{-1}+n^{-1}}$;

4) $\left(\dfrac{5m^{-4}}{2n^{-1}}\right)^{-3}\cdot 125m^{-10}n^{2}$.

2. Якщо $x+y=5$ і $xy=6$, то $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=?$

3. Обчисліть значення виразу $\dfrac{xy-2y+x-2}{x^2-4}$, якщо $x=3$, $y=1{,}5$.

4. Знайдіть значення виразу $\dfrac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\dfrac{c+3}{8-c^3}$, якщо $c=-3$.

5. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$.

6. Доведіть, що значення виразу не залежить від буквених значень:

1) $\dfrac{a}{a+2}-\left(\dfrac{a}{a^2-4}+\dfrac{a}{a^2-4a+4}\right):\dfrac{2a}{(2-a)^2}$;

2) $\dfrac{(m-n)^2}{m}\cdot\left(\dfrac{m}{(n-m)^2}+\dfrac{m}{m^2-n^2}\right)+\dfrac{2n}{m+n}$;

3) $\left(\dfrac{a}{(b-a)^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}\right)\cdot\dfrac{(a-b)^2}{a}+\dfrac{3a+b}{a+b}$.

7. Густина міді дорівнює $8{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3. Знайдіть масу мідної плити завдовжки $2{,}5\cdot 10^{-1}$ м, ширина якої становить 12 см, а висота дорівнює 0,02 м. Для обчислення маси знайдіть відповідну формулу в довіднику.

8. Спростіть вираз $\dfrac{b^{-1}+3c^{-1}}{c^{-2}}\cdot\dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1}+3b^{-1}c^{-2}}$.

Рівень С

1. Відомо, що $x+\dfrac{1}{x}=-2$. Обчисліть $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

2. Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^3+b^3}-\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}\right):\dfrac{2ab}{a^2-ab+b^2}$.

3. Знайдіть значення виразу $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\dfrac{x}{y}=2$.

4. Спростіть вираз $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$.

5. Відомо, що $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{12}{13}$. Знайдіть $\dfrac{x^2}{y^2}$.

6. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{a^2}{4b^3}+\frac{2}{a}\right):\left(\frac{a}{2b^2}-\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right):\frac{(a-2b)^2+8ab}{4+\frac{2a}{b}}$ є додатним при всіх допустимих значеннях змінних.

7. Спростіть вираз $\left(b^{-1}-\frac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\frac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$. Відповідь запишіть у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

8. Доведіть, що значення виразу $\frac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y}\cdot\frac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}-1}:\frac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1}$ не залежить від значень змінних.

VII. Рефлексія (1 хв)

Мої враження від уроку

○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9 ○ 10

Жахливі — Чудові

Поради собі для наступного уроку . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .