

III. Поняття арифметичного квадратного кореня

На попередньому уроці ми досліджували рівняння $x^2 = a$, корені якого називали квадратними коренями з числа a .

Наприклад.

1) Квадратними коренями з числа 2500 є числа -50 та 50 , бо $(-50)^2 = 2500$ та $50^2 = 2500$.

2) Квадратними коренями з числа 0,36 є числа $-0,6$ та $0,6$, бо $(-0,6)^2 = 0,36$ та $0,6^2 = 0,36$.

3) Квадратним коренем числа 0 є число 0, бо $0^2 = 0$.

4) Квадратних коренів з від'ємних чисел не існує на множині дійсних чисел, бо жодне дійсне число при піднесенні до квадрата не буде від'ємним.

Означення. Корені рівняння виду $x^2 = a$, якщо $a > 0$, називають **квадратними коренями** і позначають $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$. Додатнє значення кореня рівняння $x^2 = a$ називається арифметичним квадратним коренем із числа a .

Означення. Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Тобто: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Наприклад, $\sqrt{36} = 6$, оскільки $6^2 = 36$;

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0^2 = 0$;

$\sqrt{64} = 8$, оскільки $8^2 = 64$;

$\sqrt{81} = 9$, оскільки $9^2 = 81$;

$\sqrt{\frac{16}{225}} = \frac{4}{15}$, оскільки $\left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{16}{225}$.

Числа, з яких корінь без остачі не добувається, називають ірраціональними числами, тобто нескінченними неперіодичними десятковими дробами. Тоді, для обчислень, можна брати наближені значення цих коренів.

Порада учням. Запам'ятайте, що $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$, оскільки ці корені часто використовують як у практичних обчисленнях, так і, до речі, в тестових завданнях ЗНО/НМТ.

Історична довідка про виникнення квадратних коренів

До XVI ст. ірраціональні числа називалися «глухими», такими, що не вимовляються (surdi – лат.). У підручниках з математики англomовних країн можна зустріти термін surds (арифметичний корінь), що співзвучний до відомого вам слова сурдопереклад, тобто переклад для людей з вадами слуху.

Давньогрецькі математики квадратний корінь називали плєура — сторона, тобто обчислення сторони квадрата за даною площею. В латинській мові це слово «radix» — сторона, бік, корінь. Тому квадратні корені називають радикалами, що означає корені.

За першою буквою слова radix — r виник знак кореня $\sqrt{\quad}$, який увів у математику Рене Декарт.

Порада учням. Знак $\sqrt{\quad}$ використовують саме на позначення арифметичного квадратного кореня. Тому, у різноманітних прикладах, у яких використовують цей знак, маємо обчислювати саме арифметичний квадратний корінь.

Історична довідка про обчислення значень арифметичного квадратного кореня

Стародавні вавилоняни 4 тис. років тому добували квадратний корінь, якщо число не було точним квадратом, за допомогою формули, яку в сучасному вигляді можна записати так: $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$.

За допомогою цієї формули знайдемо наближене значення числа $\sqrt{13}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} \approx 3 + \frac{4}{6} = 3, (6).$$

Якщо обчислити $\sqrt{13}$ на калькуляторі з точністю до 0,001, то отримаємо: $\sqrt{13} \approx 3,606$.

IV. Квадратний корінь зі степеня

Якщо піднести квадратний корінь до квадрата, то яке число отримаємо?

Оскільки $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, то із наведеного означення арифметичного квадратного кореня випливає, що для будь-якого невід'ємного числа a маємо $\sqrt{a} \geq 0$ і $(\sqrt{a})^2 = a$, бо $b = \sqrt{a}$, а b^2 — це a .

Нехай потрібно обчислити значення $\sqrt{(-1,96)^2}$.

Якщо використовувати правила, які регулюють порядок виконання дій при обчисленнях, то спочатку потрібно піднести число, що під знаком кореня до квадрата і добути корінь: $\sqrt{(-1,96)^2} = \sqrt{3,8416} = 1,96$, що зробити без калькулятора досить важко, тому на допомогу приходить властивість:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Доведення. Оскільки $|a| \geq 0$, то $|a|^2 = a^2$.

Тоді: $\sqrt{(-1,96)^2} = |-1,96| = 1,96$.

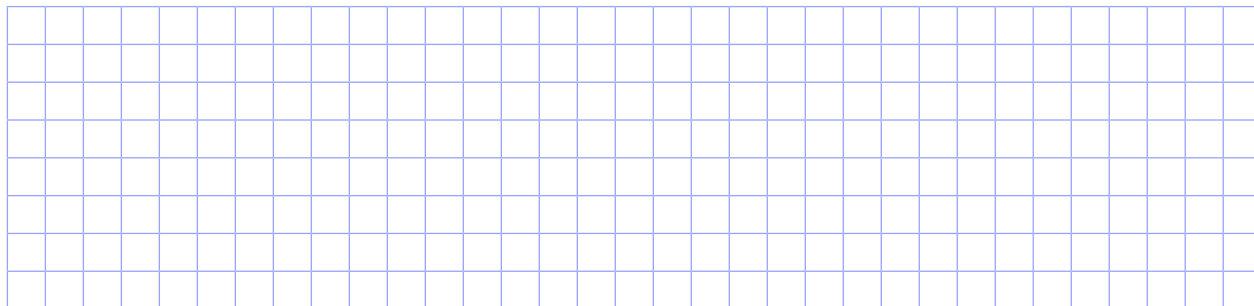
Існує більш загальна властивість, яка доводиться аналогічно:

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Приклад 1. Спростіть вираз $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$.

[illegible]

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(n-2)^2} = 25$.



V. Квадратний корінь із добутку та частки

Як можна обчислювати квадратні корені з великих чисел або дробів без калькулятора?

Приклад. Обчислимо значення виразу:

$$\sqrt{0,25 \cdot 0,49} = \sqrt{0,1225} = 0,35.$$

$$\text{Проте, } 0,35 = 0,5 \cdot 0,7 = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,49}.$$

$$\text{Це означає, що } \sqrt{0,25 \cdot 0,49} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,49} = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35.$$

Отож, чи завжди можна так обчислювати?

Правильною є властивість:

Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доведення. Оскільки $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$, то: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$.

Ця формула поширюється на будь-яку скінченну кількість невід'ємних множників.

Оскільки квадрат дробового виразу дорівнює квадрату чисельника поділеного на квадрат знаменника, то маємо властивість:

Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доведення цієї властивості проведіть самостійно — аналогічно доведенню попередньої властивості.

Відеоуроки: «Арифметичний квадратний корінь. Властивості арифметичних квадратних коренів»

<https://vm.tiktok.com/ZMhr8BqTW/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhr8XuEP/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhr87aXP/> _____



<https://vm.tiktok.com/ZMhr8WR2J/> _____



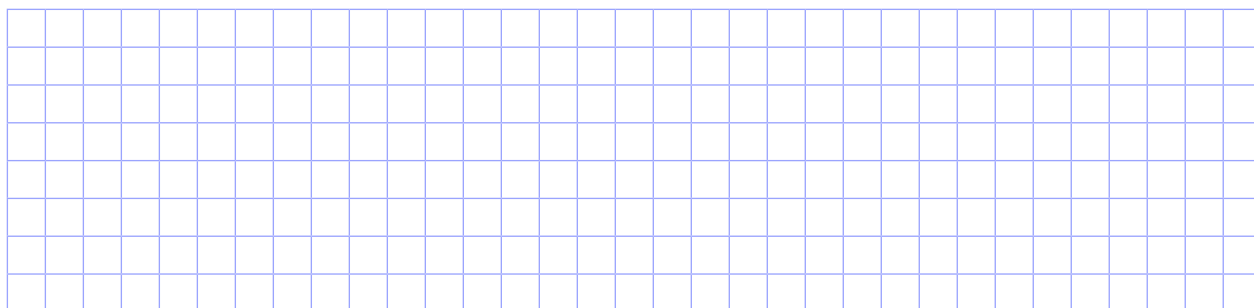
<https://vm.tiktok.com/ZMhr87CvD/> _____



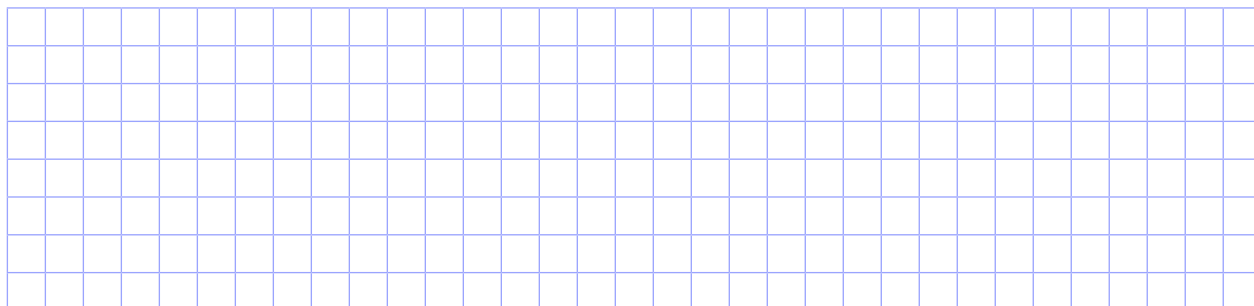
<https://vm.tiktok.com/ZMhrL1pRj/> _____



Приклад 3. Обчисліть: $\sqrt{1\frac{24}{25} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot 2,56}$.



Приклад 4. Обчисліть: $\sqrt{3\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$.



Приклад 5. Учень навів такі міркування: $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25}$, тобто вираз не має змісту. В чому помилка учня? Як правильно обчислити?

Розв'язання. Помилка в тому, що учень застосував властивість арифметичного квадратного кореня з добутку для від'ємних чисел -4 та -25 , чого робити не можна, бо властивість була доведена лише для невід'ємних чисел.

Правильно обчислювати так: $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$.

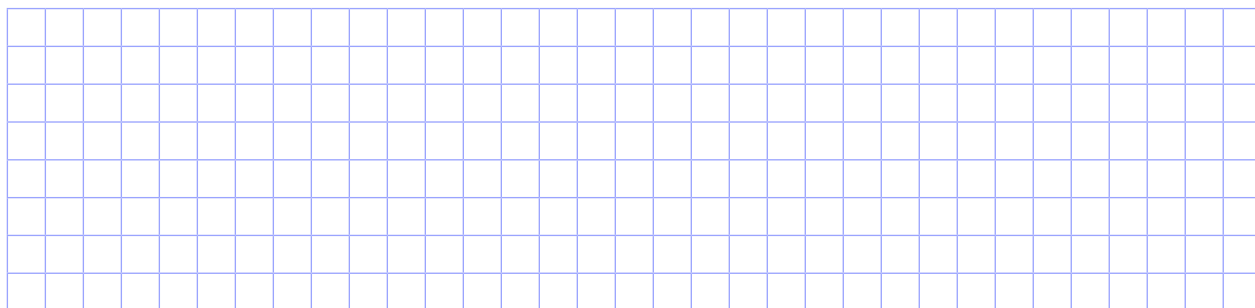
Властивості для **недодатних** чисел a та b :

1) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ ($b \neq 0$).

Коли виникає потреба не добувати корінь із добутку або з частки, а навпаки, помножити або поділити декілька арифметичних квадратних коренів, тоді також використовують наведені властивості.

Приклад 6. Бабуся Марія має прямокутну земельну грядку, довжина якої дорівнює $\sqrt{40}$ м, а її діагональ — $\sqrt{50}$ м. Знайдіть ширину цієї грядки та її площу, аби бабуся порахувала, скільки кущів троянд вона може посадити на грядці, якщо на $0,5 \text{ м}^2$ можна садити один кущ.



VI. Розв'язування практичних задач

Задача 1. Для контролю правильних вимірів фундаменту будинку прямокутної форми, виміряють діагоналі, оскільки в прямокутника діагоналі рівні. Якщо довжина фундаменту становить 15 м, а ширина — 9 метрів, то якої довжини мають бути діагоналі?

Задача 2. Найвідомішою пірамідою на планеті є піраміда Хеопса, розміри якої мають цікаві математичні залежності. Наприклад, площа квадрата, побудованого на висоті піраміди, дорівнює площі бічної грані піраміди. Площа бічної грані становить $21963,24 \text{ м}^2$. Як знайти висоту піраміди?



Автор фото: Ігор Клочко

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 2025$.

Узагальнення вивченого матеріалу можна провести у вигляді інтерактивної гри за допомогою сервісу Kahoot:

<https://create.kahoot.it/details/2864134a-7e5f-4648-aba7-c1c5ce3347f1> ____



VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Спростіть вирази:

1) $\sqrt{9a^{16}}$; 2) $\sqrt{36b^8}$; 3) $\sqrt{49c^4}$; 4) $\sqrt{81d^6}$.

2. Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 3) $\sqrt{85^2 - 84^2}$.

3. Обчисліть:

1) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{160}}$; 2) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}}$; 3) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$.

4. Площа квадрата дорівнює 25 м^2 , а другого — становить 36 м^2 .

- 1) У скільки разів сторона другого квадрата довша за сторону першого?
- 2) На скільки відсотків сторона другого квадрата більша за сторону першого?
- 3) На скільки відсотків площа другого квадрата більша за площу першого?

5. Обчисліть:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \sqrt{6}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$.

6. День квадратного кореня відзначають тоді, коли число і порядковий номер місяця є квадратними коренями із числа, утвореного двома останніми цифрами року. Уперше цей день відзначали 9 вересня 1981 року (09.09.1981). Укажіть найближчу дату в майбутньому, коли відзначатиметься цей день.

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sqrt{(-1,2)^4}$; 2) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^6}$; 3) $\sqrt{\left(1\frac{2}{3}\right)^4}$; 4) $\sqrt{(-11)^6}$.

2. Спростіть вирази:

1) $\sqrt{36m^{18}}$, якщо $m < 0$; 2) $\sqrt{a^6b^{10}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;
3) $\sqrt{16y^{10}}$, якщо $y \geq 0$; 4) $-0,2a^3\sqrt{1,21a^{18}b^{16}}$, якщо $a \leq 0$.

3. Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{72,5^2 - 17,5^2}$; 2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$.

4. Знайдіть значення числових виразів:

1) $\sqrt{0,05} \cdot \sqrt{45}$; 2) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{1,2}$; 3) $\sqrt{16,9} \cdot \sqrt{0,04}$; 4) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{0,025}}$.

5. Обчисліть:

1) $\sqrt{10^6 \cdot 0,04^2}$; 2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-40)^2}$;
3) $\sqrt{\frac{(-2)^6 \cdot 3^4}{5^2}}$; 4) $\sqrt{(-6)^6 \cdot 0,2^4 \cdot (-2)^2}$.

6. Площа квадрата 25 м². Якою має бути сторона іншого квадрата, щоб його площа була на 96% більшою?

7. Спростіть вирази:

1) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2}$; 3) $\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$.

8. Для обчислення площі S трикутника використовується формула Герона:
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Обчисліть площі трикутників та заповніть таблицю.

a	b	c	p	S
13	14	15		
13	20	21		
12	58	50		

Обчислення намагайтесь робити найраціональнішим способом без використання калькулятора.

9. Знайдіть значення квадратного кореня без калькулятора, попередньо розклавши число під коренем на множники:

1) $\sqrt{139876}$; 2) $\sqrt{331776}$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, якщо $x \geq 0$; 2) $y = \sqrt{x^2} - 1$.

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = x + 12$; 2) $\sqrt{x^2} = 9 - x$.

12. Один фінансист, який прогавив упродовж навчання в школі вивчення квадратних коренів, міркував так:

$$\sqrt{1 \text{ грн}} = \sqrt{100 \text{ коп.}} = 10 \text{ коп.}$$

але $\sqrt{1 \text{ грн}} = \sqrt{1^2 \text{ грн}} = 1 \text{ грн}$, тобто $1 \text{ грн} = 10 \text{ коп.}$

Укажіть, де «прогалина» у міркуваннях фінансиста, який «прогавив» корені.

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sqrt{2,5 \cdot 510 \cdot 1 \frac{8}{17} \cdot 3}$; 2) $\sqrt{950 \cdot 5 \cdot 2 \frac{11}{19} \cdot 1,6}$.

2. Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$;

2) $\sqrt{\frac{145,5^2 - 96,5^2}{193,5^2 - 31,5^2}}$;

3) $\sqrt{0,27 \cdot 36 + 0,73 \cdot 36}$;

4) $\sqrt{(313^2 - 312^2)(82^2 - 18^2)}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $-\sqrt{y^2} = -\sqrt{45 \cdot 80}$;

2) $2\sqrt{p^4} = \sqrt{8 \cdot 98}$.

4. Спростіть вирази:

1) $-5\sqrt{a^2 + 12a + 36}$, якщо $a < -6$;

2) $\frac{\sqrt{a^2 + 14a + 49}}{a + 7}$, якщо $a < -7$.

5. За яких умов рівності будуть тотожностями:

1) $\sqrt{x^{22}} = x^{11}$;

2) $\sqrt{a^{16}} = a^8$;

3) $\sqrt{(-p)^2} = -p$?

6. Спростіть вирази:

1) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

7. Доведіть формулу $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$.

8. Творче завдання. Напишіть комп'ютерну програму добування квадратного кореня зі степеня з натуральним показником.

Рефлексія

1. Я знаю, що таке арифметичний квадратний корінь.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я розумію, як добувати арифметичний квадратний корінь із чисел, які є точними квадратами.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я відрізняю дії піднесення кореня до квадрата та добування кореня із квадрата.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я можу використовувати властивості арифметичного квадратного кореня для обчислень та спрощень виразів.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я вмію множити і ділити між собою арифметичні квадратні корені.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Арифметичний квадратний корінь у геометричних задачах.
2. Квадратний корінь у комп'ютерній графіці.
3. Створіть демонстраційний постер, який наочно ілюструє властивості арифметичного квадратного кореня та сфери його застосування.
4. Дослідіть різні методи обчислення арифметичних квадратних коренів. Порівняйте точність обчислень при застосуванні цих методів.
5. Аналіз ролі квадратного кореня в алгоритмах шифрування даних.
6. Способи наближених обчислень арифметичного квадратного кореня.







