10 Тема 4. Рівняння з однією змінною. Властивості рівнянь

Урок 3. Теорема Вієта для квадратних рівнянь. Розклад квадратного тричлена на лінійні множники

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

1) повторите теорему Вієта;

2) навчитеся використовувати теорему Вієта для виявлення закономірностей між коефіцієнтами квадратного рівняння та його коренями;

3) навчитеся використовувати теорему, обернену до теореми Вієта, для усного розв'язування деяких квадратних рівнянь;

4) зрозумієте, як складати квадратні рівняння за заданими його коренями;

5) повторите алгоритм розкладу квадратного тричлена на лінійні множники;

6) навчитеся застосовувати теорему Вієта до розв'язування рівнянь з параметром;

7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 7x = 0$.

2. Скільки коренів має рівняння $20x^2 - 2x - 5 = 0$?

3. Знайдіть корені рівняння $(2x - 1)^2 = 15$.

4. Розкладіть вираз $(2x - 1)^2 - (x - 2)^2$ на множники.

5. Обчисліть значення виразу $\left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt{3}-2\right)-2\sqrt{3}$.

III. Теорема Вієта для квадратних рівнянь

Історична довідка

Співвідношення між коренями квадратного рівняння дослідив французький математик Франсуа Вієт (1540 –1603). Він був одним із перших, хто почав числа в рівняннях позначати буквами. Замість звичних нам x, x^2, x^3 він писав відповідно N, Q, C, тобто перші букви латинських слів Numerus (число), Quadratus (квадрат), Cubus (куб).

За допомогою уведеного ним буквеного числення, він не тільки записав у загальному вигляді формули коренів квадратного рівняння, але й також знайшов закономірності між коефіцієнтами та коренями квадратного рівняння, які у наш час називають теоремою Вієта.

Примітка. Ознайомтесь за допомогою інтернет-ресурсів із біографією Франсуа Вієта.

Означення. Зведеним квадратним рівнянням називається рівняння виду $x^2 + px + q = 0$, у якому старший коефіцієнт дорівнює 1, де p — другий коефіцієнт, q — вільний член.

Для будь-якого квадратного рівняння можна записати рівносильне йому зведене квадратне рівняння, якщо поділити обидві його частини на старший коефіцієнт.

Наприклад, для рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$ отримаємо $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$.

Теорема Вієта. **Якщо x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ та $x_1 \cdot x_2 = q$.**

Доведення. Знайдемо дискримінант: $D = p^2 - 4q$.

$$x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2},\ x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-p-\sqrt{D}\right)\left(-p+\sqrt{D}\right)}{4} = \frac{p^2-D}{4} = \frac{p^2-p^2+4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Наслідок. **Якщо квадратне рівняння не є зведеним, тобто $ax^2 + bx + c = 0$ з коренями x_1 та x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.**

Приклад 1. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $2x^2 + 5x - 2 = 0$.

Розв'язання. Щоб переконатися в наявності коренів рівняння $2x^2 + 5x - 2 = 0$, знайдемо дискримінант: $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 + 16 = 41 > 0$.
Отже, корені існують.

Запишемо зведене квадратне рівняння, яке рівносильне даному: $x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Відповідь. $-\frac{5}{2}; -1$.

Приклад 2. Не розв'язуючи рівняння $3x^2+8x-1=0$, знайдіть: 1) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}$; 2) $x_1^4+x_2^4$.

IV. Розв'язування квадратних рівнянь за допомогою теореми, оберненої до теореми Вієта

Важливість теореми, оберненої до теореми Вієта

1. За допомогою теореми можна усно розв'язувати квадратні рівняння, іноді навіть такі, які потребують громіздких обчислень при їхньому розв'язуванні за допомогою формул.

2. За допомогою цієї теореми можна складати квадратні рівняння за наперед заданими коренями.

Теорема (обернена до теореми Вієта). **Якщо x_1 та x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$ та $x_1 \cdot x_2 = q$, то числа x_1 та x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

Доведення. Розглянемо рівняння $x^2 + px + q = 0$. Оскільки $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1x_2$, то $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.

Щоб довести, що число є коренем рівняння, потрібно підставити це число замість змінної у рівняння й отримати правильну числову рівність.

Підставимо x_1 та x_2 в останнє рівняння:

$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = 0,$

$x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1x_2 = x_2^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2 = 0.$

Отже, x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Практичні поради. Для коефіцієнтів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ існують важливі співвідношення:

1) Якщо $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

2) Якщо $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Історична довідка

Свою знамениту теорему Франсуа Вієт відкрив у 1591 році. Для квадратного рівняння в сучасних позначеннях вона має такий вигляд: коренями рівняння $(a + b)x^2 - x^2 = ab$ є числа a та b.

V. Квадратний тричлен. Розклад квадратного тричлена на лінійні множники

Сформулюємо декілька означень.

Означення 1. Квадратним тричленом називається вираз $ax^2 + bx + c$, де a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Означення 2. Деяке число називається ***коренем квадратного тричлена*** $ax^2 + bx + c$, якщо це число є коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Означення 3. Дискримінантом D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називається вираз $b^2 - 4ac$.

Теорема. **Квадратний тричлен розкладається на множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.**

Доведення. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

За теоремою Вієта: $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$, $\frac{c}{a} = x_1x_2$.

Тоді: $ax^2 + bx + c = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) =$
$= a((x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Теорема. **Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює нулю, то його розклад на множники має вигляд: $ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.**

Доведення. У квадратному тричлені виділимо квадрат двочлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

Якщо $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Твердження. **Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то даний квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.**

Теорема. **Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то для всіх x, значення квадратного тричлена мають знак числа a, а саме:**

- **якщо $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ для всіх x;**
- **якщо $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ для всіх x.**

Доведення. Оскільки $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)$, то при $D<0$, маємо $-\frac{D}{4a^2}>0$.

Тоді $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}>0$ при всіх x.

Отже, знак добутку $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)$ залежить лише від знака числа a.

Алгоритм розкладання квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ на лінійні множники

1) Знайдіть корені квадратного тричлена.
2) Якщо рівняння має корені x_1 та x_2, то:
   - $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ при $x_1\neq x_2$;
   - $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ при $x_1=x_2$.
3) Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його неможливо розкласти на лінійні множники.

Приклад 3. Скоротіть дробовий вираз: $\frac{4x^2-5x+1}{x^2+5x-6}$.

VI. Застосування теореми Вієта для розв'язування квадратних рівнянь з параметрами

Якщо у квадратних рівняннях з параметрами виникає потреба у знаходженні значень параметра, при яких виконуються співвідношення для суми та добутку коренів рівняння, то доцільно використовувати теорему Вієта.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a, сума коренів рівняння $x^2+\left(a^2+2a-3\right)x+a=0$ дорівнює нулю? Знайдіть ці корені.

Розв'язання. Якщо корені рівняння x_1 і x_2 існують, то, за теоремою Вієта, $x_1+x_2=-\left(a^2+2a-3\right)$.

Знайдемо значення a, при яких ця сума дорівнює 0: $a^2+2a-3=0$.
За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $a_1=1$, $a_2=-3$.
Якщо $a=1$, то задане рівняння набуде вигляду $x^2+1=0$, — рівняння коренів немає.
Якщо $a=-3$, то $x^2-3=0$, звідки $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$.

Відповідь. $a=-3$; $x_1=-\sqrt{3}$; $x_2=\sqrt{3}$.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a, модуль різниці коренів рівняння $x^2 - ax + 2a = 0$ дорівнює 3?

VII. Розв'язування практичних задач

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Випускники ліцею вирішили після останнього дзвоника надіслати один одному портретні фотосвітлини так, щоб кожен із них мав у своєму телефоні фотосвітлини усіх інших випускників. Скільки всього було випускників, якщо загальна кількість фотосвітлин становить 930?

Задача 2. Паркова алея має форму прямокутного трикутника, периметр якого дорівнює 48 м. Один із катетів на 4 м більший за інший. Ландшафтний дизайнер планує висадити туї через кожних 2 м на гіпотенузі цього трикутника. Кожен саджанець коштує 230 грн. Яку суму коштів йому потрібно для закупівлі туй?

Задача 3. ***Олімпіадна задача.*** Розглянемо всі квадратні тричлени $x^2 + px + q$ із цілими коефіцієнтами, для яких $p + q = 30$. Скільки таких тричленів мають цілі корені?

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. (Усно) Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 - 5x - 6 = 0$.

2. Один із коренів рівняння $x^2 + px - 35 = 0$ дорівнює 7. Знайдіть другий корінь та коефіцієнт p.

3. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, яке має корені 5 і –2.

4. Без обчислення коренів x_1 та x_2 рівняння $3x^2 + 8x - 1 = 0$, знайдіть:
1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$.

5. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 + 8x + 15$; 2) $8x^2 - 8x + 2$.

6. Скоротіть дріб $\frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$ та обчисліть його значення, якщо $x = -3$.

Рівень B

1. (Усно) Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + 7x + 5 = 0$; 2) $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

2. Один із коренів рівняння $5x^2 + bx + 24 = 0$ дорівнює 8. Знайдіть другий корінь та коефіцієнт b.

3. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, яке має корені $\frac{1}{3}$ та $-\frac{1}{5}$.

4. Без обчислення коренів x_1 та x_2 рівняння $3x^2 + 8x - 1 = 0$, знайдіть:

1) $x_1^3 + x_2^3$; 2) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.

5. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $5x^2 - 3x - 26$; 2) $12x^2 - 7x + 1$.

6. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 9xy + 20y^2$; 2) $2x^2 + 3xy + y^2$.

7. Скоротіть дріб $\frac{4x^3 - 4x^2 - 15x}{2x^3 - 11x^2 + 15x}$ та обчисліть його значення, якщо $x = \sqrt{2} + 3$.

8. При якому значенні m, рівняння $x^2 + mx + 3 = 0$ має два корені, які збігаються?

9. При яких значеннях параметра a, добуток коренів рівняння $x^2 + (a+2)x + a^2 - 4a = 0$ дорівнює 5?

10. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $\left(a^2 - a - 6\right)x = a^2 - 9$.

11. Спростіть вираз $\frac{x^2 + x - 20}{x - 4} - \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x - 3} - \frac{4 - 8x - 5x^2}{x + 2}$.

12. Розв'яжіть нерівність $(2x - 1)\left(2x^2 - 3x + 5\right) < 0$.

Рівень C

1. (Усно) Розв'яжіть рівняння:

1) $67x^2 - 105x - 172 = 0$; 2) $x^2 + \left(\sqrt{3} - 2\right)x - 2\sqrt{3} = 0$.

2. Різниця коренів рівняння $x^2 + x + c = 0$ дорівнює 6. Знайдіть c.

3. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, яке має корені $-\sqrt{2} - 3$ та $-\sqrt{2} + 3$.

4. Без обчислення коренів x_1 та x_2 рівняння $3x^2 + 8x - 1 = 0$, знайдіть:

1) $x_1x_2^4 + x_2x_1^4$; 2) $x_1^4 + x_2^4$.

5. При яких значеннях параметра a, сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 2ax - 3 = 0$ є найменшою?

6. Скоротіть дріб $\frac{2x^2 + (4a - 6b - 1)x - 2a + 3b}{x^2 + (3a - 4b)x + 2a^2 - 5ab + 3b^2}$.

7. ***Творче завдання.*** Запрограмуйте алгоритм розв'язання рівняння завдання 10 рівня B.

Узагальнення вивченого матеріалу можна провести у вигляді інтерактивної гри за допомогою сервісу Kahoot:

https://create.kahoot.it/details/5aa1d58f-0415–410f-bc29-f51005f09734 _____

Рефлексія

1. Я знаю теорему Вієта.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я вмію використовувати теорему Вієта.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я вмію застосовувати теорему, обернену до теореми Вієта, для розв'язування квадратних рівнянь.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я можу складати квадратні рівняння за наперед заданими коренями.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я знаю означення квадратного тричлена.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я вмію розкладати квадратний тричлен на лінійні множники.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я вмію використовувати алгоритм розкладання квадратних тричленів на множники, щоб спрощувати вирази.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

8. Я вмію знаходити закономірності між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

9. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Історія відкриття теореми Вієта, та застосування теореми в математиці.
2. Дослідження різноманітних залежностей між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами на основі теореми Вієта.
3. Використання теореми Вієта в задачах математичних олімпіад.
4. Теорема Вієта для рівнянь вищих степенів.
5. Складання комп'ютерної програми за алгоритмом розкладу квадратного тричлена на лінійні множники.