10 Тема 5. Системи лінійних та нелінійних рівнянь

Урок 4. Системи нелінійних рівнянь. Однорідні та симетричні системи рівнянь

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) перевірите свої знання;

2) навчитеся розв'язувати системи однорідних рівнянь;

3) навчитеся розв'язувати системи симетричних рівнянь;

4) навчитеся розв'язувати практичні задачі з теми.

II. Самостійна робота

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0, \\ x + 12y = 11. \end{cases}$ Якщо $(x_0;\ y_0)$ — розв'язок системи, то $x_0 + y_0 = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
–2	2	0	1	–1

2. Знайдіть координати точки перетину прямих $y = 10x + 30$ і $y = -12x + 272$. Обчисліть добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо $(x_0;\ y_0)$ — координати точки перетину прямих.

А	Б	В	Г	Д
1540	151	2420	1240	2540

3. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x+2y-5=0, \\ 2x+4y+3=0? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
один	два	жодного	безліч	неможливо визначити

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4, \\ \frac{3}{y}-\frac{1}{x}=-9. \end{cases}$

5. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=x^2-6? \end{cases}$ Виконайте завдання графічним методом.

6. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а його периметр становить 28 см. Знайдіть площу прямокутника.

7. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x-y=16, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$

III. Однорідні системи рівнянь

Означення. Рівняння з двома невідомими $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = 0$ називається ***однорідним*** рівнянням.

В однорідному рівнянні кожний доданок містить добуток степенів x і y, сума показників яких стала.

1) Якщо обидва рівняння системи однорідні, то при $y = 0$ отримаємо $x = 0$, тобто пара (0; 0) — розв'язок.

2) Якщо $y \neq 0$, то $x \neq 0$, то потрібно розділити ліву і праву частини рівняння на найбільший степінь невідомих x або y.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. 1) Друге рівняння системи — однорідне. Розв'язок цього рівняння (0; 0) також є розв'язком і першого рівняння.

2) Розглянемо рівняння $x^2 + 3xy - 10y^2 = 0$.

Поділимо праву і ліву частини рівняння на y^2, за умови, що $y \neq 0$.

Отримаємо: $\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} - 10 = 0$.

Уведемо заміну $\frac{x}{y} = t$. Розв'яжемо рівняння:

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $t_1 = -5$, $t_2 = 2$.

Врахуємо заміну: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -5y, \\ (-5y)^2 - (-5y)\cdot y + 3y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y, \\ (2y)^2 - 2y\cdot y + 3y = 0, \end{cases} \end{array}\right.$

Перша система сукупності має розв'язок $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}\right)$.

Друга система сукупності має розв'язок (–3; –1,5).

Урахуємо також розв'язок (0; 0).

Відповідь. (0; 0), (–3; –1,5), $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}\right)$.

IV. Симетричні системи рівнянь

Означення. Система рівнянь з n невідомими називається ***симетричною***, якщо вона не міняється при перестановці невідомих.

Якщо невідомих два (x і y), то такі системи можна розв'язати за допомогою заміни:

$$u = x + y,\ v = xy.$$

При цьому використовуємо такі рівності:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$,

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv$,

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$.

За цими рівностями можна виразити комбінації сум $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ через невідомі u та v.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

V. Розв'язування практичної задачі

Задача. Тераса має форму прямокутника. Терасу потрібно замостити плиткою з розмірами 42 см × 42 см. Майстру-плиточнику відомо, що добуток площі тераси та півпериметра тераси дорівнює 6. А сума площі й півпериметра тераси становить 5. Знайдіть виміри (у метрах) прямокутної тераси. Яку кількість плитки необхідно придбати майстру-плиточнику?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -1, \\ xy = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = y = -2, \\ xy = 7. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 21, \\ x^3 + y^3 = 50; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy = 7, \\ y^2 - xy = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3. \end{cases}$

3. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25, \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 = -y. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків може мати система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = x^2 + 4? \end{cases}$

5. Добуток двох невід'ємних чисел у 15 разів більший за суму цих чисел. Якщо до першого числа додати потроєне друге число, то отримаємо 100. Знайдіть ці числа.

6. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = -9, \\ x^2 + y^2 = 9? \end{cases}$

7. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр та вдвічі більше за добуток його цифр.

8. Господар підприємства поділив ділянку сільськогосподарських угідь на дві частини й посадив сад яблунь та груш. На одній частині ділянки він посадив яблуні, а на іншій — груші. Відомо, що добуток кількості яблунь та груш дорівнює 240. Якщо до кількості яблунь додати 10 і одночасно збільшити кількість груш удвічі, то разом дерев буде 120. Скільки яблунь і скільки груш посадив господар?

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y - y^3 = 0, \\ x^3 - y^2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 0, \\ x^3 - y^3 = 0. \end{cases}$

2. Сума двох чисел дорівнює 12, а добуток цих чисел становить 25. Знайдіть числа.

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-3| + y^2 = 3 - x, \\ y = x^2 + 2x - 15. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ x + y = 3 \end{cases}$ двома способами — підстановкою та заміною змінних. Порівняйте способи розв'язання та зробіть висновок.

5. Два коти Мурчик і Барсик, що живуть у млині, разом можуть спіймати всіх мишей за 6 годин. Якби Мурчик полював сам, то впіймав би усіх мишей на 5 годин швидше, ніж Барсик. За скільки годин кожен котик може впоратися із завданням самостійно?

6. Знайдіть усі значення a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ має чотири розв'язки.

7. Один із катетів прямокутного трикутника на 1 м менший від гіпотенузи і на 1 м більший за інший катет. Знайдіть площу прямокутного трикутника.

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2(x + y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 56, \\ x + xy + y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = 5{,}2, \\ \dfrac{1}{6}xy - (x + y) = 1. \end{cases}$

9. Гаррі Поттер вирушив з Гоґвортсу до села Гоґсмід. До села він летів на чарівній мітлі при попутному вітрі. Назад хлопець повертався проти вітру. На увесь шлях Гаррі Поттер потратив 10 годин. Середня арифметична швидкість польоту за вітром та проти вітру становила 12 км/год. Знайдіть швидкість вітру, якщо вітер дув із незмінною швидкістю.

10. На чайній фабриці робітники фасують зелений чай та чорний чай. Фасування однієї пачки зеленого чаю коштує 10 грн, а фасування однієї пачки чорного чаю — 15 грн. Загальні витрати фабрики на фасування усього чаю становлять 600 грн на день. Якщо сума квадратів кількостей фасованих пачок чаю за день становить 400, то скільки одиниць кожної пачки чаю фасують на фабриці?

Рівень С

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x^2+y^2=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x+3y)(x-2y)=0,\\ x^2-y^2=12;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-2y)^2-y^2+2x-6y=0,\\ x^2-y^2=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x^2-6y=2xy,\\ 6x^2-16y=xy.\end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19,\\ x+xy+y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x(3x-4y)+4y^2=64,\\ x(3x+4y)+4y^2=16.\end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11\end{cases}$ та обчисліть суму більшого значення x і меншого значення y розв'язків системи рівнянь.

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2y^2+xy=72,\\ x+y=6.\end{cases}$

5. Чи має розв'язок система рівнянь $\begin{cases}3x-4y=-2,\\ 3x+y^2=10,\\ x^2-y^2-x+y=100?\end{cases}$

6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}|x-3|+y^2=3-x,\\ y=x^2+2x-15.\end{cases}$

7. Визначте найменше ціле число a, за якого система $\begin{cases}x^2+y^2=81,\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ має два розв'язки.

8. Коло $(x-4)^2+(y-6)^2=25$ і пряма $y=bx$ перетинаються в точці $A(1;2)$. Знайдіть координати іншої точки перетину кола й прямої, якщо така існує.

Рефлексія

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

4) Найскладнішим для мене було . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

6) Найбільше мені сподобалося . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .