

**Урок 4. Системи нелінійних рівнянь.
Однорідні та симетричні системи рівнянь**

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Самостійна робота.
2. Однорідні системи рівнянь.
3. Симетричні системи рівнянь.
4. Розв'язування систем рівнянь.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

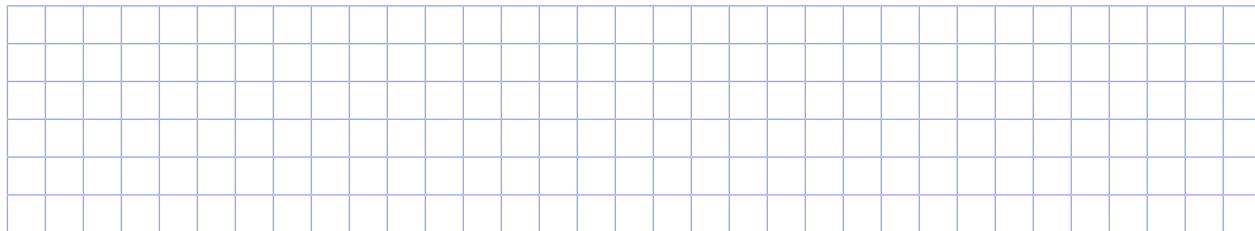
- 1) Якщо вважаєте за потрібне, то проведіть самостійну роботу на узагальнення знань.
- 2) Проведіть рефлексію за результатами виконання самостійної роботи.
- 3) Сформулюйте практичну задачу без розв'язання. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Пояснення методів розв'язання однорідних та симетричних систем рівнянь виконуйте за допомогою ілюстративних прикладів.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

7) Час, який пропонується на ту чи іншу частину уроку, має умовний характер. Орієнтуйтеся на сприйняття матеріалу учнями/ученицями.

II. Самостійна робота (15–20 хв)

[illegible][illegible][illegible]

4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4, \\ \frac{3}{y} - \frac{1}{x} = -9. \end{cases}$$



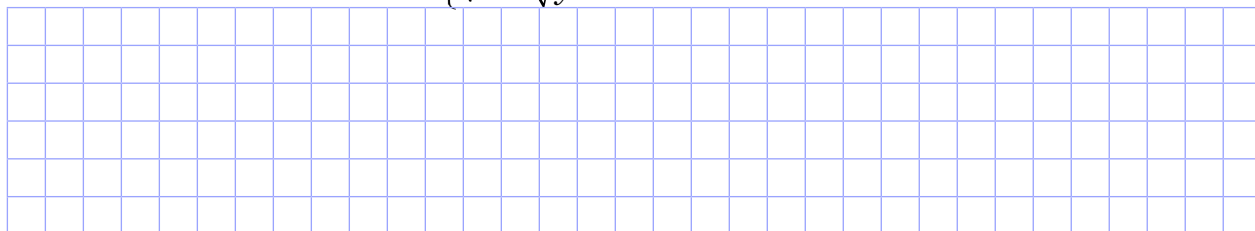
5. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 6? \end{cases}$$
 Виконайте завдання графічним методом.



6. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а його периметр становить 28 см. Знайдіть площу прямокутника.



7. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y = 16, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$



Відповіді до завдань

1. В. 2. А. 3. Г. 4. $\left(\frac{1}{6}; -1\right)$. 5. Чотири. 6. 48 см². 7. (25; 9).

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Тераса має форму прямокутника. Терасу потрібно замостити плиткою з розмірами 42 см × 42 см. Майстру-плиточнику відомо, що добуток площі тераси та півпериметра тераси дорівнює 6. А сума площі й півпериметра тераси становить 5. Знайдіть виміри (у метрах) прямокутної тераси. Яку кількість плитки необхідно придбати майстру-плиточнику?

III. Однорідні системи рівнянь

Означення. Рівняння з двома невідомими $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n = 0$ називається **однорідним** рівнянням.

В однорідному рівнянні кожний доданок містить добуток степенів x і y , сума показників яких стала.

1) Якщо обидва рівняння системи однорідні, то при $y = 0$ отримаємо $x = 0$, тобто пара $(0; 0)$ — розв'язок.

2) Якщо $y \neq 0$, то $x \neq 0$, то потрібно розділити ліву і праву частини рівняння на найбільший степінь невідомих x або y .

Ілюстративний приклад (4–5 хв)

1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - xy + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Друге рівняння системи — однорідне. Розв'язок цього рівняння $(0; 0)$ також є розв'язком і першого рівняння.

2) Розглянемо рівняння $x^2 + 3xy - 10y^2 = 0$.

Поділимо праву і ліву частини рівняння на y^2 , за умови, що $y \neq 0$.

Отримаємо: $\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} - 10 = 0$.

Уведемо заміну $\frac{x}{y} = t$. Розв'яжемо рівняння:

$$t^2 + 3t - 10 = 0, \quad t_1 = -5, \quad t_2 = 2.$$

Врахуємо заміну:
$$\begin{cases} x = -5y, \\ (-5y)^2 - (-5y) \cdot y + 3y = 0, \\ x = 2y, \\ (2y)^2 - 2y \cdot y + 3y = 0, \end{cases}$$

Перша система сукупності має розв'язок $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}\right)$.

Друга система сукупності має розв'язок $(-3; -1,5)$.

Урахуємо також розв'язок $(0; 0)$.

Відповідь. $(0; 0)$, $(-3; -1,5)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}\right)$.

IV. Симетричні системи рівнянь (3–4 хв)

Означення. Система рівнянь з n невідомими називається **симетричною**, якщо вона не міняється при перестановці невідомих.

Якщо невідомих два (x і y), то такі системи можна розв'язати за допомогою заміни:

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

При цьому використовуємо такі рівності:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2.$$

За цими рівностями можна виразити комбінації сум $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ через невідомі u та v .

Ілюстративний приклад (4–5 хв)

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Задана система рівнянь є симетричною.

Отже, застосуємо заміну $x + y = u$, $xy = v$.

$$\begin{cases} u^2 - v = 7, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Звідси: $u^2 + u = 12$, $u^2 + u - 12 = 0$, $\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 2, \end{cases}$ або $\begin{cases} u_2 = -4, \\ v_2 = 9. \end{cases}$

2) З урахуванням заміни, отримаємо:
$$\begin{cases} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 9. \end{cases} \end{cases}$$

Пари чисел, які задовольняють першу систему сукупності: (1; 2), (2; 1).

Друга система розв'язків не має.

Відповідь. (1; 2), (2; 1).

V. Розв'язування практичної задачі. Групова робота (8–10 хв)

Задача. Тераса має форму прямокутника. Терасу потрібно замостити плиткою з розмірами 42 см $\times$ 42 см. Майстру-плиточнику відомо, що добуток площі тераси та півпериметра тераси дорівнює 6. А сума площі й півпериметра тераси становить 5. Знайдіть виміри (у метрах) прямокутної тераси. Яку кількість плитки необхідно придбати майстру-плиточнику?

Розв'язання. 1) Нехай x – ширина прямокутної тераси, тоді y — довжина тераси. За умовою, $S = xy$ — площа прямокутної тераси, а $p = x + y$ — півпериметр тераси.

Складемо систему рівнянь:
$$\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ xy + (x + y) = 5. \end{cases}$$

Маємо симетричну систему.

Отже, для її розв'язання вводимо заміну: $x + y = u$, $xy = v$.

Тоді:
$$\begin{cases} uv = 6, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Пари чисел (3; 2) та (2; 3) — розв'язки системи.

З урахуванням заміни, отримаємо:
$$\begin{cases} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \end{cases}$$

Перша система розв'язків не має.

Розв'язками другої системи є пари чисел (2; 1) та (1; 2).

Отже, ширина тераси дорівнює 1 м, а її довжина становить 2 м.

2) Площа прямокутної тераси: $S = xy = 1 \cdot 2 = 2$ (м²).

3) Одна плитка, з розмірами 42 см $\times$ 42 см, замостить площу:
 $0,42 \cdot 0,42 = 0,1764$ (м²).

4) Знайдемо кількість плиток: $n = 2 : 0,1764 \approx 11,34$.

Тому знадобиться щонайменше 12 плиток.

Відповідь. 2 м, 1 м. Не менше 12 плиток.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -1, \\ xy = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = y = -2, \\ xy = 7. \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 21, \\ x^3 + y^3 = 50; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy = 7, \\ y^2 - xy = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3. \end{cases}$

3. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25, \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 = -y. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків може мати система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = x^2 + 4? \end{cases}$

5. Добуток двох невід'ємних чисел у 15 разів більший за суму цих чисел. Якщо до першого числа додати потроєне друге число, то отримаємо 100. Знайдіть ці числа.

6. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = -9, \\ x^2 + y^2 = 9? \end{cases}$

7. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр та вдвічі більше за добуток його цифр.

8. Господар підприємства поділив ділянку сільськогосподарських угідь на дві частини й посадив сад яблунь та груш. На одній частині ділянки він посадив яблуні, а на іншій — груші. Відомо, що добуток кількості яблунь та груш дорівнює 240. Якщо до кількості яблунь додати 10 і одночасно збільшити кількість груш удвічі, то разом дерев буде 120. Скільки яблунь і скільки груш посадив господар?

Рівень В

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 y - y^3 = 0, \\ x^3 - y^2 x = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 0, \\ x^3 - y^3 = 0. \end{cases}$$

2. Сума двох чисел дорівнює 12, а добуток цих чисел становить 25. Знайдіть числа.

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x - 3| + y^2 = 3 - x, \\ y = x^2 + 2x - 15. \end{cases}$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5, \\ x + y = 3 \end{cases}$ двома способами — підстановкою та за-

міною змінних. Порівняйте способи розв'язання та зробіть висновок.

5. Два коти Мурчик і Барсик, що живуть у млині, разом можуть спіймати всіх мишей за 6 годин. Якби Мурчик полював сам, то впіймав би усіх мишей на 5 годин швидше, ніж Барсик. За скільки годин кожен котик може впоратися із завданням самостійно?

6. Знайдіть усі значення a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ має чотири розв'язки.

7. Один із катетів прямокутного трикутника на 1 м менший від гіпотенузи і на 1 м більший за інший катет. Знайдіть площу прямокутного трикутника.

8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2(x + y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 56, \\ x + xy + y = 7; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 5,2, \\ \frac{1}{6}xy - (x + y) = 1. \end{cases}$$

9. Гаррі Поттер вирушив з Гогвортсу до села Гогсмід. До села він летів на чарівній мітлі при попутному вітрі. Назад хлопець повертався проти вітру. На увесь шлях Гаррі Поттер потратив 10 годин. Середня арифметична швидкість польоту за вітром та проти вітру становила 12 км/год. Знайдіть швидкість вітру, якщо вітер дув із незмінною швидкістю.

- 10.** На чайній фабриці робітники фасують зелений чай та чорний чай. Фасування однієї пачки зеленого чаю коштує 10 грн, а фасування однієї пачки чорного чаю — 15 грн. Загальні витрати фабрики на фасування усього чаю становлять 600 грн на день. Якщо сума квадратів кількостей фасованих пачок чаю за день становить 400, то скільки одиниць кожної пачки чаю фасують на фабриці?

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x + 3y)(x - 2y) = 0, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x - 2y)^2 - y^2 + 2x - 6y = 0, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4x^2 - 6y = 2xy, \\ 6x^2 - 16y = xy. \end{cases}$$

- 2.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + xy + y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x(3x - 4y) + 4y^2 = 64, \\ x(3x + 4y) + 4y^2 = 16. \end{cases}$$

- 3.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$ та обчисліть суму більшого значення x і меншого значення y розв'язків системи рівнянь.

- 4.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6. \end{cases}$

- 5.** Чи має розв'язок система рівнянь $\begin{cases} 3x - 4y = -2, \\ 3x + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 - x + y = 100? \end{cases}$

- 6.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x - 3| + y^2 = 3 - x, \\ y = x^2 + 2x - 15. \end{cases}$

- 7.** Визначте найменше ціле число a , за якого система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має два розв'язки.

- 8.** Коло $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$ і пряма $y = bx$ перетинаються в точці $A(1; 2)$. Знайдіть координати іншої точки перетину кола й прямої, якщо така існує.

VII. Рефлексія (2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

.....

.....

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти

.....

.....

- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-