



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 1. Означення кореня n -го степеня

План уроку

1. Необхідність введення кореня n -го степеня.
2. Означення кореня n -го степеня.
3. Рівняння виду $x^n = a$, де n — непарне натуральне число.
4. Рівняння виду $x^n = a$, де n — парне натуральне число.
5. Означення арифметичного кореня n -го степеня.
6. Властивість арифметичного кореня n -го степеня, що впливає з його означення.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно чи у співпраці з іншими визначає суттєві дані у комплексній проблемній ситуації та їхню достовірність [12 МАО 3.1.1–1];

за потреби, виправляє помилки та вносить зміни у математичну модель та/або спосіб розв'язання [12 МАО 3.2.3–1];

самостійно та у співпраці з іншими добирає доцільні математичні поняття, факти та послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–2];

застосовує визначену послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–3].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) На початку уроку запропонуйте учням мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте задачу на використання кореня. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте глибоко за змістом, але стисло за формою, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні для розв'язування задач з алгебри, геометрії, фізики, хімії, тощо.
- 4) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів.
- 5) Наводьте ілюстративні приклади у межах часових можливостей уроку. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Пропонуйте учням/ученицям розв'язання практичної задачі в межах уроку. Об'єднайте клас у кілька груп. Упродовж розв'язування задачі групами важливо формувати комуні-

каційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних проблем.

7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

8) Обов'язково включаємо в урок задачі практичного змісту та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок та навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

9) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Як пов'язані квадратний корінь та рівняння $x^2 = a$?

2) Як розв'язати рівняння $x^3 = 1$, $x^3 = 8$, $x^3 = 7$?

3) Скільки дійсних коренів має кожне з рівнянь: $x^4 = 1$, $x^4 = 16$, $x^4 = 0$, $x^4 = -16$?

4) Що спільного та що різного у квадратного кореня та арифметичного квадратного кореня; кореня парного степеня та арифметичного кореня парного степеня?

5) Для яких дійсних чисел існує корінь непарного степеня, але не існує кореня парного степеня?

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $\sqrt{49} - \sqrt{36}$.

А	Б	В	Г	Д
13	3	-1	1	$\sqrt{13}$

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 = 25$.

А	Б	В	Г	Д
± 5	5	12,5	-5	$\sqrt{25}$

3. Укажіть рівняння, що має два дійсні корені.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 = 0$	$x^3 = 1$	$x^2 = 5$	$x^2 = -64$	$2x + 5 = 12$

4. Знайдіть ОДЗ виразу $\sqrt{2x-5}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2,5]$	$(-\infty; 2,5)$	$[0; +\infty)$	$x \neq 2,5$	$[2,5; +\infty)$

5. Обчисліть $(\sqrt{2})^4$.

А	Б	В	Г	Д
2	$\sqrt{8}$	$4\sqrt{2}$	4	8

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Маса алюмінієвого кубика дорівнює 172,8 г. Знайдіть додаткову інформацію про густину алюмінію та розрахуйте довжину ребра кубика.

III. Необхідність введення кореня n -го степеня

Розглянемо неповні квадратні рівняння та їхні розв'язання.

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2,$$

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3,$$

$$x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}.$$

Для кожного з наведених рівнянь у розв'язанні використовується операція знаходження арифметичного квадратного кореня, а в останньому випадку без відповідного знака неможливо навіть записати відповідь. Отже, навіть найпростіші квадратні рівняння тісно пов'язані з квадратними коренями.

Спробуємо тепер розв'язати неповні рівняння вищих степенів.

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2, \text{ але що робити з рівнянням } x^3 = 7?$$

$$x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ але як розв'язати рівняння схожого типу } x^4 = 17?$$

Узагалі, якщо дано рівняння $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$, то скільки воно має дійсних коренів та як їх обчислити? При $n = 2$ відповідь вам відома: якщо $a > 0$, то рівняння має два корені $x = \pm\sqrt{a}$, якщо $a < 0$, то рівняння не має дійсних коренів, якщо $a = 0$, то рівняння має один корінь (два корені, що збігаються) $x = 0$. Таким чином, для розв'язання рівнянь другого степеня потрібний квадратний корінь. Аналогічно, для розв'язання рівнянь n -го степеня потрібно ввести поняття кореня n -го степеня.

IV. Означення кореня n -го степеня

Означення. Коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$) з даного числа a називають таке число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Випадок	Властивості	Позначення	ОДЗ	Приклади
n — непарне	Для будь-якого дійсного числа a існує єдиний корінь n -го степеня з a .	$\sqrt[n]{a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ $\sqrt[3]{7} \approx 1,912931183$
n — парне	1. Якщо $a > 0$, то існують два протилежних значення кореня n -го степеня з числа a . 2. Якщо $a = 0$, то існує один корінь n -го степеня, і він дорівнює нулю. 3. Якщо $a < 0$, то кореня n -го степеня з числа a в дійсних числах не існує.	$\sqrt[n]{a}$; $-\sqrt[n]{a}$	$a \geq 0$	$\sqrt[4]{81} = 3$ $\sqrt[6]{0} = 0$ $\sqrt[8]{-256}$ не існує $\sqrt[4]{17} \approx 2,030543185$

Зауваження.

- 1) Число n у позначенні кореня $\sqrt[n]{a}$ називають показником кореня, або степенем кореня.
- 2) При $n = 2$ відповідний корінь називають квадратним, а число 2 у позначенні такого кореня зазвичай не пишуть: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.
- 3) При $n = 3$ відповідний корінь $\sqrt[3]{a}$ називають кубічним.

Ілюстративні приклади

6. Обчисліть:

- 1) $\sqrt[4]{16}$;
- 2) $\sqrt[3]{-125}$;
- 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[4]{0,0081}$.

Розв'язання.

- 1) $\sqrt[4]{16} = 2$, оскільки $2 > 0$, $2^4 = 16$.

Відповідь. 2.

- 2) $\sqrt[3]{-125} = -5$, оскільки $(-5)^3 = -5^3 = -125$.

Відповідь. - 5.

- 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[4]{0,0081} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \sqrt[4]{\frac{81}{10000}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{10} = \frac{15-3}{10} = 1,2$.

Відповідь. 1,2.

7. Знайдіть значення змінної, при яких має зміст вираз:

- 1) $\sqrt[5]{x-3}$;
- 2) $\sqrt[4]{x^2-6x}$;
- 3) $\frac{x+1}{\sqrt[6]{x}}$.

Розв'язання. 1) Оскільки показник кореня — число 5 — є непарним, то корінь існує для будь-якого числа. Отже, $x-3$ може набувати будь-яких значень, а тому змінна x може бути будь-яким дійсним числом.

Відповідь. $x \in \mathbb{R}$.

- 2) Оскільки показник кореня — число 4 — є парним, то корінь існує лише для невід'ємних чисел: $x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-6) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$.

3) При знаходженні ОДЗ даного виразу варто врахувати, що знаменник дробу має бути ненульовим, а під коренем парного степеня вираз має бути невід'ємним:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt[6]{x} \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Відповідь. $x \in (0; +\infty)$.

V. Рівняння виду $x^n = a$, де n — натуральне число

Так само, як і при означенні кореня n -го степеня, при розв'язуванні відповідних рівнянь виникають два принципово різних варіанти: n — непарне та n — парне.

Найпростіші рівняння n -го степеня		
Вид рівняння	Відповідь	Приклади
$x^n = a$, n — непарне	$x = \sqrt[n]{a}$	$x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = 2$ $x^3 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12} \approx 2,29$
$x^n = a$, n — парне	$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$, при $a > 0$ $x = 0$, при $a = 0$ $x \in \emptyset$, при $a < 0$	$x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$ $x^6 = -64 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ $x^4 = 24 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{24} \approx 2,21$

Ілюстративні приклади

8. Розв'яжіть рівняння: 1) $x^5 = -0,00032$; 2) $x^4 + 4 = 0$; 3) $(x^2 - 4x + 6)^4 = 81$.

Розв'язання.

$$1) x^5 = -0,00032; x = \sqrt[5]{-0,00032}; x = \sqrt[5]{-\frac{32}{100000}}; x = -\frac{2}{10}.$$

Відповідь. $-0,2$.

2) $x^4 + 4 = 0$; $x^4 = -4$. Рівняння не має дійсних розв'язків, оскільки ліва частина набуває лише невід'ємних значень, а права є від'ємним числом.

Відповідь. $\emptyset$.

$$3) (x^2 - 4x + 6)^4 = 81; \begin{cases} x^2 - 4x + 6 = \sqrt[4]{81}, \\ x^2 - 4x + 6 = -\sqrt[4]{81}; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + 6 = 3, \\ x^2 - 4x + 6 = -3; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x^2 - 4x + 9 = 0. \end{cases}$$

Отримали два квадратні рівняння, перше з яких має корені 1 та 3, а друге — не має дійсних коренів.

Відповідь. 1; 3.

VI. Означення арифметичного кореня n -го степеня

При виконанні перетворень, що спрощують вид виразу із коренем n -го степеня, часто користуються аналогіями з вивченими вже властивостями квадратного кореня. Але для того, щоб усі відповідні властивості виконувалися незалежно від парності числа n , вводять до розгляду поняття арифметичного кореня n -го степеня.

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) з даного невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Відповідне значення позначають $\sqrt[n]{a}$.

1) При парному значенні n підкореневий вираз у такому запису завжди має бути невід'ємним.

2) При непарному значенні n підкореневий вираз може бути від'ємним, і тоді такий корінь не вважається арифметичним. Але дану ситуацію легко звести до арифметичного кореня, скориставшись формулою $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

VII. Властивість кореня n -го степеня, що впливає з його означення

З означення кореня, зокрема арифметичного, впливає, що добування кореня є, у певному сенсі, операцією, зворотною до піднесення числа до степеня: $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $a \geq 0$.

Ілюстративні приклади

9. Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{-216} - \sqrt[5]{-32}$.

Розв'язання. Зведемо корені з умови до арифметичних:

$$\sqrt[3]{-216} - \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[3]{216} - (-\sqrt[5]{32}) = -6 + 2 = -4.$$

Відповідь. -4 .

10. Знайдіть значення виразу: 1) $(\sqrt[3]{-25})^3$; 2) $(\sqrt[4]{8})^8$.

Розв'язання.

$$1) (\sqrt[3]{-25})^3 = -25.$$

Відповідь. -25 .

$$2) (\sqrt[4]{8})^8 = (\sqrt[4]{8})^{4 \cdot 2} = \left((\sqrt[4]{8})^4 \right)^2 = 8^2 = 64.$$

Відповідь. 64 .

Історичні відомості

Математичний термін «корінь» має довгу і складну історію. Добування квадратного кореня стародавні греки розуміли строго геометрично: як знаходження сторони квадрата за відомою його площею. Згодом у Європі закріпилося аналогічне за змістом латинське слово «radix» — корінь.

Середньовічні математики, наприклад, Кардано, позначали квадратний корінь символом R_x , скорочення від слова «radix». Сучасне позначення $\sqrt{}$ вперше вжив німецький математик Крістоф Рудольфф у 1525 році. Походить цей символ від стилізованої першої літери того ж слова «radix». Риска над підкореневим виразом спочатку була відсутня; її ввів Декарт у 1637 році, і ця риска незабаром злилася зі знаком кореня. Сам знак часто називають радикалом, а вирази, що містять корені, — вирази з радикалами.

Показник степеня з'явився в знаку кореня завдяки англійцям Джону Валлісу і Ісааку Ньютону, видатним ученим 17 – 18 століть.

Висновок. Тема «корені n -го степеня» є природним продовженням теми «квадратні корені». Так само, як квадратні корені дозволяють розв'язувати квадратні рівняння, корені n -го степеня дозволяють, у найпростіших випадках, знайти розв'язки рівнянь n -го степеня. Але варто звернути увагу на важливі відмінності на множині дійсних чисел коренів парного та непарного степенів: перші існують тільки для невід'ємних чисел, другі — для будь-яких.

VIII. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Маса алюмінієвого кубика дорівнює 172,8 г. Знайдіть додаткову інформацію про густину алюмінію та розрахуйте довжину ребра кубика.

Розв'язання. Нехай ребро куба дорівнює a (см), тоді його об'єм дорівнює $V = a^3$ (см³). Позначимо густину алюмінію через ρ (г/см³), а масу кубика через m (г).

$$\text{Тоді: } m = \rho V = \rho a^3; \quad a^3 = \frac{m}{\rho}; \quad a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}.$$

Знаходимо в інтернеті густину алюмінію: $\rho = 2,7$ (г/см³).

$$\text{Отримуємо: } a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{172,8}{2,7}} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 4 см.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) \sqrt[3]{-27}; \quad 2) \sqrt[5]{32}; \quad 3) \sqrt[4]{625}.$$

2. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 - \sqrt[3]{0,001}; \quad 2) \sqrt[3]{\sqrt{64}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}; \quad 3) \sqrt[4]{3^4} - 3\sqrt[3]{\frac{8}{27}}.$$

3. Визначте, при яких значеннях змінної має зміст вираз:

$$1) \sqrt{2x+1}; \quad 2) \sqrt[4]{x^2-25}; \quad 3) \sqrt[5]{4x^3+3x^2+2x+1}.$$

4. Розв'яжіть рівняння найпростішого виду непарного степеня:

$$1) x^3 = 125; \quad 2) 5x^5 = -160; \quad 3) (2x-1)^5 = 243.$$

5. Розв'яжіть рівняння найпростішого виду парного степеня:

$$1) x^4 = 81; \quad 2) 5x^6 = 320; \quad 3) (2x+1)^8 = -256.$$

6. Знайдіть корені рівняння. Обчисліть їх із точністю до сотих, використовуючи калькулятор, комп'ютер, ІІІ або інші додаткові пристрої чи джерела інформації:

$$1) x^3 = 9; \quad 2) 3x^4 = 15; \quad 3) (3x+2)^5 = 40.$$

Рівень В

1. Обчисліть:

1) $\sqrt[4]{625}$;

2) $\sqrt[5]{1024}$;

3) $\sqrt[3]{1000000000}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} - \sqrt[3]{-0,125}$;

2) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^6}$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} - \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{4096}}}$.

3. Визначте, при яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt[6]{8-2x^2}$;

2) $\sqrt[4]{x^2-6x+8}$;

3) $\sqrt[5]{\frac{4x^3+3x^2+2x+1}{\sqrt[4]{x-1}-1}}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3 + 7 = 1465$;

2) $3\sqrt[5]{x} = -2$;

3) $(x^2 - 4x + 6)^5 = 243$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-5)^4 = \frac{16}{81}$;

2) $-3(5x-1)^6 = 192$;

3) $\sqrt[4]{3x+5} = 3$.

6. Укажіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число:

1) $\sqrt[3]{25}$;

2) $\sqrt[4]{72}$;

3) $\sqrt[5]{5\sqrt{5}}$.

7. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $x^8 - 9x^4 + 18 = 0$;

2) $x^6 - 3x^3 - 7 = 0$;

3) $x^{12} = 4x^6 + 21$.

8. Оцініть $\sqrt[n]{x}$, за умови:

1) $n = 4; 16 \leq x \leq 39,0625$;

2) $n = 3; -0,512 \leq x \leq -0,085184$;

3) $n = 5; \frac{1}{7776} \leq x \leq \frac{243}{3125}$.

9. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{x-10} \leq 3$;

2) $\sqrt[5]{4x+3} > 1$;

3) $\sqrt[7]{x+2} \leq 2$.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[4]{x-10} \leq 3$;

2) $\sqrt[6]{4x+3} > 1$;

3) $\sqrt[8]{x+2} \leq 2$.

11. Розв'яжіть нерівність:

1) $3x^5 - 9 \geq 0$;

2) $x^8 - 5x^4 + 6 \geq 0$;

3) $x^{12} = 4x^6 + 21$.

12. Вкладник поклав на рахунок до банку 10000 грн, а через 4 роки отримав гроші з прибутком 4641 грн. Кожного року банк нараховував один і той самий відсоток на гроші, що зберігаються на рахунку. Який відсоток щорічної винагороди для вкладників установив банк?

Рівень С

1. Знайдіть ОДЗ даного виразу:

1) $\sqrt[6]{\frac{8+2x^2}{3x^2-5x-8}}$;

2) $\sqrt[4]{x^4-6x^2+8}$;

3) $\sqrt[6]{\frac{x^4-2x^2+1}{|2x-5|-|5x-2|}}$.

2. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$; 2) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

3. Доведіть ірраціональність чисел:

1) $\sqrt[4]{2}$; 2) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

4. Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[8]{x} = 4$; 2) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 3) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$.

5. Знайдіть, при яких натуральних показниках кореня виконується рівність:

$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt{20}$.

6. Доведіть числову рівність, не використовуючи наближених обчислень:

$\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$.

Х. Рефлексія

1. Я вмію застосовувати означення кореня n -го степеня.

Так Ще треба потренуватися Ні

2. Я вмію знаходити ОДЗ кореня парного степеня.

Так Ще треба потренуватися Ні

3. Я вмію розв'язувати рівняння виду $x^n = a$.

Так Ще треба потренуватися Ні

4. Я вмію обчислювати арифметичний корінь n -го степеня у нескладних випадках.

Так Ще треба потренуватися Ні

5. Я знаю, як застосовувати властивість кореня n -го степеня, що впливає з його означення.

Так Ще треба потренуватися Ні

6. Я розумію ідею застосування коренів n -го степеня для розв'язування практичних задач.

Так Ще треба потренуватися Ні

Можливі теми проєктів

1. Геометричні задачі, що призводять до кубічних коренів.

2. Розв'язання кубічних рівнянь.

3. Використання коренів n -го степеня у фізичних задачах.