



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 10. Урок–практикум. Тотожні перетворення ірраціональних виразів

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички щодо застосування означення кореня n -го степеня та степеня з дробовим показником;
- 2) відпрацюєте вміння та навички знаходження ОДЗ ірраціональних виразів;
- 3) відпрацюєте застосування властивостей коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками;
- 4) відпрацюєте перетворення ірраціональних виразів, що містять одночасно степені з раціональними показниками та корені n -го степеня;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв'язання прикладної задачі методами алгебри.

II. Математичний диктант

Математичний диктант — корисний інструмент для контролю знань і тренування математичного мислення.

Цілі диктанту:

- перевірити оперативні обчислення і володіння технікою обчислень;
- виявити прогалини в базових поняттях (терміни, формули);
- розвивати швидкість мислення і точність;
- підготовка до тематичного оцінювання: тренування концентрації в умовах обмеженого часу.

Завдання для математичного диктанту

№	Запитання	Відповідь
1	Обчисліть: $5^2 : 5^{-2}$.	
2	Запишіть формулу арифметичного кореня n -го степеня з добутку.	
3	Обчисліть: $9^{1,5}$.	
4	Запишіть за допомогою кореня $a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$).	
5	Знайдіть ОДЗ виразу $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$.	
6	Спростіть вираз $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$.	
7	Сформулюйте правило піднесення степеня до степеня для випадку раціональних показників степенів.	
8	Порівняйте: $\sqrt[3]{6}$ та $\sqrt{3}$.	
9	Спростіть вираз $(32a^5b^{-10})^{0,4}$ при $a > 0, b > 0$.	
10	Розв'яжіть рівняння $(4x)^{\frac{3}{2}} = 32$.	
11	Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює 36π см ³ .	
12	При яких значеннях параметра a вираз $\frac{(x^2 - 5ax + 6)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2 + ax + a^2}}$ визначений при будь-яких дійсних значеннях x ?	

III. Робота в парах над перетворенням виразів, які містять степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в парах

1. Спростіть вираз $(1 - a^2) : \left(\left(\frac{1 - a^{\frac{3}{2}}}{1 - a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1 + a^{\frac{3}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 1$.

2. Спростіть вираз та обчисліть його значення при $x = 0,0256$:

$$\left[1 - \left(\frac{x^{-\frac{3}{4}} + 1}{x^{-\frac{1}{4}} + 1} + \frac{3}{x^{\frac{1}{4}}} \right) : \left(x^{-\frac{1}{4}} + 1 \right) \right] : x^{-\frac{3}{4}}.$$

IV. Робота в малих групах над спрощенням комбінованих виразів, що містять корені n -го степеня та степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в малих групах

3. Спростіть та обчисліть значення виразу $\frac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)^2}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}.$

4. Спростіть ліву частину та розв'яжіть рівняння відносно змінної x :

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a + b + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a - b - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}} = \frac{2x - 3}{3x + 1}.$$

При яких значеннях параметрів рівняння не має розв'язків?

V. Складне завдання. Мозковий штурм

5. Спростіть вираз

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\left(\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2a^2 - b^2\right)^{-3}}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 2b^2}.$$

Розв'язання. Перетворимо спочатку перший доданок, урахувавши властивості степенів та коренів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\left((a^2 + b^2)^3\right)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{1}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot |a^2 + b^2| = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Перетворимо тепер другий доданок, урахувавши властивості степенів з раціональними показниками:

$$\frac{\left(\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2a^2 - b^2\right)^{-3}}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 2b^2} = \frac{\left(b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - a^2 - 2a^2 - b^2\right)^{-3}}{a^2 + \left(b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - a^2\right) + 2b^2} =$$

$$= \left(\frac{-3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - 3a^2}{3b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}} \right)^{-3} = \left(\frac{-3a^{\frac{2}{3}} \left(b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \right)}{3b^{\frac{2}{3}} \left(b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \right)} \right)^{-3} = \left(\frac{-a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \right)^{-3} = \frac{-a^{-2}}{b^{-2}} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Остаточню маємо:

$$\frac{1}{a^2} \sqrt[3]{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}} \right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 2a^2 - b^2}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^3 + 2b^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Зауважимо, що всі виконані перетворення є правильними, за умови $a > 0, b > 0$.

Відповідь. 1.

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За спрощеною алометричною моделлю частота серцевих скорочень f (уд/хв)

пов'язана з масою тіла M (кг) законом: $f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}}$, де k — стала величина. Відомо, що середня частота серцебиття людини з масою 70 кг становить приблизно 70 уд/хв.

а) Знайдіть значення сталої k .

б) Користуючись цим значенням, передбачте середню частоту серцебиття для тварин: миша (0,02 кг), кішка (4 кг), слон (5000 кг).

в) Порівняйте отримані прогнози з типовими спостережуваними значеннями (приблизно: миша — 600 уд/хв, кішка — 150 уд/хв, слон — 30 уд/хв) і надайте короткий коментар про обмеження даної моделі.

Рефлексія

1. Я вмію застосовувати означення кореня n -го степеня та степеня з дробовим показником.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я вмію знаходити ОДЗ коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я вмію застосовувати властивості коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками для обчислення значень ірраціональних виразів.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я вмію застосовувати властивості кореня n -го степеня та степенів для спрощення ірраціональних виразів зі змінними.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 5.** Я вмію перетворювати вирази, що містять степені та корені одночасно.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 6.** Я розумію ідею застосування коренів степенів з раціональними показниками для розв'язування практичних задач.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Порівняння ефективності використання різних штучних інтелектів при перетвореннях ірраціональних виразів.
- 2.** Використання нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним при розв'язуванні рівнянь та їхніх систем.
- 3.** Застосування степенів з раціональними показниками в біології.







