



Тема 1.

Корені n -го степеня

Урок 10. Урок–практикум. Тотожні перетворення ірраціональних виразів

План уроку

1. Перетворення виразів, які містять степені з раціональними показниками.
2. Спрощення комбінованих виразів, що містять корені n -го степеня та степені з раціональними показниками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте задачу на використання властивостей степенів з раціональними показниками. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням математичний диктант.
- 3) Учні/учениці об'єднуються в пари і працюють над наступною серією завдань. Учитель виступає у ролі консультанта та радника. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.
- 4) Об'єднуємо клас у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті на різних уроках знання.
- 5) Один або декілька учнів можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та консультанта.
- 6) Запропонуйте учням та ученицям продумати ідеї щодо розв'язання складного завдання 5 та обговорити ці ідеї всім класом у режимі мозкового штурму. Найкращі ідеї доцільно реалізувати на дошці/екрані, враховуючи інші думки та ідеї, критичні зауваження тощо.

7) Об'єднуємо учнів та учениць у групи (такі самі, як на III етапі роботи). Розвиваємо навички комунікації та командної роботи під час розв'язування практичної задачі за допомогою алгебри.

8) Основна мета уроку — закріплення умінь та навичок щодо обчислення та застосування степеневих виразів з раціональними показниками.

9) Важливо постійно акцентувати увагу на ОДЗ степеневих виразів з раціональними показниками, при різних значеннях показника степеня.

10) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

11) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язати обраний на занятті рівень тренувальних вправ або розв'язати інший рівень, або розв'язати окремі завдання з усіх рівнів (оберіть для учнів схему, що відповідає засвоєнню ними теми на уроці та інших індивідуальних чинників). Зверніть їхню увагу на завдання практичного змісту.

12) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За спрощеною аллометричною моделлю частота серцевих скорочень f (уд/хв)

пов'язана з масою тіла M (кг) законом: $f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}}$, де k — стала величина. Відомо, що середня частота серцебиття людини з масою 70 кг становить приблизно 70 уд/хв.

а) Знайдіть значення сталої k .

б) Користуючись цим значенням, передбачте середню частоту серцебиття для тварин: миша (0,02 кг), кішка (4 кг), слон (5000 кг).

в) Порівняйте отримані прогнози з типовими спостережуваними значеннями (приблизно: миша — 600 уд/хв, кішка — 150 уд/хв, слон — 30 уд/хв) і надайте короткий коментар про обмеження даної моделі.

II. Математичний диктант

Математичний диктант — корисний інструмент для контролю знань і тренування математичного мислення.

Цілі диктанту:

- перевірити оперативні обчислення і володіння технікою обчислень;
- виявити прогалини в базових поняттях (терміни, формули);
- розвивати швидкість мислення і точність;
- підготовка до тематичного оцінювання: тренування концентрації в умовах обмеженого часу.

Наведений нижче варіант диктанту можна проводити усно, письмово або за допомогою Google-форм тощо.

На проведення диктанту доцільно витратити не більше 15 хвилин, після чого оприлюднити правильні відповіді (на дошці, екрані тощо) і, у разі необхідності, коротко обговорити проблемні моменти. При письмовій версії проведення варто заздалегідь підготувати аркуші паперу. Використання калькуляторів та будь-яких інших електронних пристроїв не дозволяється. Умови завдань бажано надавати послідовно. Самі умови учні/учениці можуть не записувати, натомість записувати тільки відповіді. Важливо забезпечити тишу й умови для концентрації.

Передбачено, що кожне запитання «оцінюється» в 1 бал. Тож, кількість правильних відповідей дорівнює оцінці за диктант.

Завдання для математичного диктанту

№	Запитання	Відповідь
1	Обчисліть: $5^2 : 5^{-2}$.	625.
2	Запишіть формулу арифметичного кореня n -го степеня з добутку.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$.
3	Обчисліть: $9^{1,5}$.	27.
4	Запишіть за допомогою кореня $a^{\frac{m}{n}} (a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.	$\sqrt[n]{a^m}$.
5	Знайдіть ОДЗ виразу $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$.	$a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.
6	Спростіть вираз $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$.	$a^{\frac{5}{6}}$.
7	Сформулюйте правило піднесення степеня до степеня для випадку раціональних показників степенів.	$(a^p)^q = a^{pq} (a > 0, p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q})$.
8	Порівняйте: $\sqrt[3]{6}$ та $\sqrt{3}$.	$\sqrt[3]{6} > \sqrt{3}$.
9	Спростіть вираз $(32a^5b^{-10})^{0,4}$ при $a > 0, b > 0$.	$\frac{4a^2}{b^4}$.
10	Розв'яжіть рівняння $(4x)^{\frac{3}{2}} = 32$.	$x = \sqrt[3]{16}$.
11	Об'єм кулі з радіусом R обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює 36π см ³ .	3 см.
12	При яких значеннях параметра a вираз $\frac{(x^2 - 5ax + 6)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2 + ax + a^2}}$ визначений при будь-яких дійсних значеннях x ?	$a \in \left[\frac{-2\sqrt{6}}{5}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{2\sqrt{6}}{5} \right]$.

III. Робота в парах над перетворенням виразів, які містять степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в парах

1. Спростіть вираз $(1-a^2) : \left(\left(\frac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 1$.

2. Спростіть вираз та обчисліть його значення при $x = 0,0256$:

$$\left[1 - \left(\frac{x^{-\frac{3}{4}} + 1}{x^{-\frac{1}{4}} + 1} + \frac{3}{x^{\frac{1}{4}}} \right) : \left(x^{-\frac{1}{4}} + 1 \right) \right] : x^{-\frac{3}{4}}.$$

IV. Робота в малих групах над спрощенням комбінованих виразів, що містять корені n -го степеня та степені з раціональними показниками

Завдання для роботи в малих групах

3. Спростіть та обчисліть значення виразу $\frac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2} \right)^2}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}$.

4. Спростіть ліву частину та розв'яжіть рівняння відносно змінної x :

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)^3}{a + b + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right)^3}{a - b - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}} = \frac{2x-3}{3x+1}.$$

При яких значеннях параметрів рівняння не має розв'язків?

V. Складне завдання. Мозковий штурм

5. Спростіть вираз

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}} \right)^{\frac{2}{3}}} + \left(\frac{\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 2a^2 - b^2}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^3 + 2b^2} \right)^{-3}.$$

Розв'язання. Перетворимо спочатку перший доданок, урахувавши властивості степенів та коренів:

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\left((a^2 + b^2)^3 \right)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot |a^2 + b^2| = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}.$$

Перетворимо тепер другий доданок, ураховуючи властивості степенів з раціональними показниками:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2a^2 - b^2}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 2b^2} \right)^{-3} = \left(\frac{b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - a^2 - 2a^2 - b^2}{a^2 + \left(b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - a^2\right) + 2b^2} \right)^{-3} = \\ & = \left(\frac{-3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} - 3a^2}{3b^2 - 3b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}}} \right)^{-3} = \left(\frac{-3a^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}\right)}{3b^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}\right)} \right)^{-3} = \left(\frac{-a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \right)^{-3} = \frac{-a^{-2}}{b^{-2}} = -\frac{b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\left(a^6 + \frac{3a^4}{b^{-2}} + \frac{a^2b^4}{3^{-1}} + \frac{1}{b^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}}} + \left(\frac{\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2a^2 - b^2}{a^2 + \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 2b^2} \right)^{-3} = 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Зауважимо, що всі виконані перетворення є правильними, за умови $a > 0, b > 0$.

Відповідь. 1.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За спрощеною алометричною моделлю частота серцевих скорочень f (уд/хв)

пов'язана з масою тіла M (кг) законом: $f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}}$, де k — стала величина. Відомо, що середня частота серцебиття людини з масою 70 кг становить приблизно 70 уд/хв.

а) Знайдіть значення сталої k .

б) Користуючись цим значенням, передбачте середню частоту серцебиття для тварин: миша (0,02 кг), кішка (4 кг), слон (5000 кг).

в) Порівняйте отримані прогнози з типовими спостережуваними значеннями (приблизно: миша — 600 уд/хв, кішка — 150 уд/хв, слон — 30 уд/хв) і надайте короткий коментар про обмеження даної моделі.

Розв'язання. З формули $f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}}$ випливає, що $k = f \cdot m^{\frac{1}{4}}$.

Оскільки середня частота серцебиття людини з масою 70 кг становить приблизно

70 уд/хв, то: $k \approx 70 \cdot 70^{\frac{1}{4}} = 70^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{70}\right)^5 \approx 202$.

Відповідно, можна передбачити приблизну частоту серцебиття тварин:

1) миша $f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}} \approx 202 \cdot (0,02)^{-\frac{1}{4}} = \frac{202}{\sqrt[4]{0,02}} \approx 537$ уд/хв;

$$2) \text{ кішка } f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}} \approx 202 \cdot 4^{-\frac{1}{4}} = \frac{202}{\sqrt[4]{4}} \approx 143 \text{ уд/хв};$$

$$3) \text{ слон } f = k \cdot m^{-\frac{1}{4}} \approx 202 \cdot 5000^{-\frac{1}{4}} = \frac{202}{\sqrt[4]{5000}} \approx 24 \text{ уд/хв}.$$

Наведена модель дає наближені показники (537 замість 600, 143 замість 150, 24 замість 30).

Джерела похибок: ми побудували константу k з одних даних (людина 70 кг, 70 уд/хв); біологічні параметри сильно варіюються між видами (метаболізм, температура тіла, спосіб життя), тому одна універсальна константа k — грубе наближення; модель ігнорує вік, стан здоров'я, фізичну активність, температуру, видову адаптацію. Такий підхід корисний для грубих порівнянь і розуміння масштабів, але не замінює емпіричних вимірювань для конкретних видів чи індивідів.

Відповідь. $k \approx 202$, миша ≈ 537 уд/хв; кішка ≈ 143 уд/хв; слон ≈ 24 уд/хв.

VII. Рефлексія

- | | | | | |
|-----------|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію застосовувати означення кореня n -го степеня та степеня з дробовим показником. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я вмію знаходити ОДЗ коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати властивості коренів n -го степеня та степенів з раціональними показниками для обчислення значень ірраціональних виразів. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я вмію застосовувати властивості кореня n -го степеня та степенів для спрощення ірраціональних виразів зі змінними. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію перетворювати вирази, що містять степені та корені одночасно. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію ідею застосування коренів степенів з раціональними показниками для розв'язування практичних задач. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- Порівняння ефективності використання різних штучних інтелектів при перетвореннях ірраціональних виразів.
- Використання нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним при розв'язуванні рівнянь та їхніх систем.
- Застосування степенів з раціональними показниками в біології.