

Урок 11. Урок–практикум. Перетворення ірраціональних виразів

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) відпрацюєте вміння та навички щодо застосування означення кореня n -го степеня та степеня з дробовим показником;
- 2) відпрацюєте вміння та навички знаходження ОДЗ ірраціональних виразів;
- 3) відпрацюєте застосування властивостей коренів та степенів з раціональними показниками;
- 4) відпрацюєте перетворення ірраціональних виразів, що містять одночасно степені з раціональними показниками та корені n -го степеня;
- 5) застосуєте набуті знання, вміння та навички для розв'язання прикладної задачі.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Спростіть вираз $(32a^5b^{-10})^{0,4}$ при $a > 0, b > 0$.
2. Спростіть та обчисліть значення виразу $\frac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)^2}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}$.
3. Обчисліть значення ірраціонального виразу $\frac{a^3 + b^3}{a + b} - (a^2 + b^2)$ при $a = 4^{\frac{7}{4}}; b = 2^{\frac{1}{2}}$.
4. Скоротіть дріб $\frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b + a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}}$.
5. Розв'яжіть рівняння, враховуючи його ОДЗ: $x^{0,8} \cdot x^{1,2} - x^{0,8} \cdot x^{0,2} - 2 = 0$.

Завдання для обговорення

1. Подайте у вигляді степеня з основою x : $\frac{x^2 \sqrt{x^2 \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x} \sqrt{x}}$.

Вказівка. Треба врахувати ОДЗ і скористатися означенням степеня з дробовим показником та властивостями степенів.

2. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}$. При яких значеннях змінних у даній нерівності досягається знак рівності?

Вказівка. Доцільно поділити обидві частини нерівності на $\sqrt{2}$ та застосувати для кожного кореня нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним невід'ємних чисел $|x|, |1-y|$ та $|y|, |1-x|$ відповідно, а також скористатися фактом, що число не перевищує свого модуля. Рівність досягається при виконанні умов $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$. Корисно знайти геометричний спосіб розв'язання даної нерівності і відповідної рівності, з використанням нерівності трикутника.

3. Для невід'ємних значень змінної доведіть, що функція $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ набуває лише невід'ємних значень.

Вказівка. Застосуйте нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним для трьох чисел: $2x^3, x^3, 4$.

III. Робота в парах над обчисленням значень ірраціональних виразів

Означення. Коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$) з даного числа a називають таке число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}, n \neq 1$) з даного невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Відповідне значення позначають $\sqrt[n]{a}$.

1) При парному значенні n підкореневий вираз у такому запису завжди має бути невід'ємним.

2) При непарному значенні n підкореневий вираз може бути від'ємним, і тоді такий корінь не вважається арифметичним. Але дану ситуацію легко звести до арифметичного кореня, скориставшись формулою $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Корінь зі степеня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$(\sqrt[n]{a})^n = a,$ $\sqrt[n]{a^n} = a.$	$(\sqrt[3]{5})^3 = 5,$ $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

<i>Корінь зі степеня</i>		
Випадок	Властивості	Приклади
n — парне	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a^n} = a .$	$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3,$ $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3.$

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з добутку: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$ $a \geq 0, b \geq 0.$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	$\sqrt[3]{0,027 \cdot 8} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{8} = 0,3 \cdot 2 = 0,6,$ $\sqrt[4]{125 \cdot 5} = \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5.$
Корінь з дробу: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$ $a \geq 0, b > 0.$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	$\sqrt[3]{\frac{0,125}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5,$ $\frac{\sqrt[3]{0,0625}}{\sqrt[3]{0,5}} = \sqrt[3]{\frac{0,0625}{0,5}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5.$
Степінь кореня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0.$	Для того, щоб піднести корінь до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	$\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2,$ $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$
Корінь з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2,$ $\sqrt{\sqrt[5]{x^2+1}} = \sqrt[10]{x^2+1} = \sqrt[10]{x^2+1}.$
Пониження степеня кореня: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[15]{512} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8},$ $\sqrt[6]{x^3+6x^2+12x+8} = \sqrt[6]{(x+2)^3} =$ $= \sqrt[3 \cdot 2]{(x+2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{(x+2)^1} = \sqrt{x+2}.$

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a^1 = a$	$a \in \mathbb{R}$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$ $-2^1 = -2.$

n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a \neq 0$	$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} =$ $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}.$
$n = 0$	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	$(-\pi)^0 = 1.$
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a \geq 0$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4,$ $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0.$
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a > 0$	$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

Властивості степенів з раціональними показниками

Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}}.$
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} = x^{-\frac{1}{15}}.$
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = x^{\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{2}} = x^{\frac{15}{10}} = x^{\frac{3}{2}}.$
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(x^{\frac{1}{5}} y^{0,1}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \cdot (y^{0,1})^{10} = x^2 y^1 = x^2 y.$
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{10} = \frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}{\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{10}} = \frac{x^2}{y^{\frac{15}{2}}}.$
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть значення виразу $2\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{62,5} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}} - \frac{\sqrt[3]{0,25} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$
- Обчисліть: $10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \frac{3}{2^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}}\right).$

3. Знайдіть значення ірраціонального виразу $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}} - 18^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{6}} - 1} + 3^{\frac{1}{3}}$.

IV. Робота в малих групах над перетворенням ірраціональних виразів

Завдання для роботи в малих групах

4. Спростіть вираз $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}} + \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}} \right)^2 \cdot \frac{x^2-1}{2} + \sqrt{1-x^2}$. При яких значеннях змінних виконані перетворення є рівносильними?
5. Спростіть вираз $\left(\frac{x^{0,75}-y}{x^{0,25}-y^{\frac{1}{3}}} - 3\sqrt[12]{x^3y^4} \right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{x^{0,75}+y}{x^{0,25}+y^{\frac{1}{3}}} - \sqrt[3]{y^2} \right)$.
6. Спростіть вираз $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}$.

V. Самостійна робота

7. Установіть відповідність між виразом (1–3) та значенням (А–Д) виразу.

Вираз

1 $\left(\frac{8^{0,5} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{27^{\frac{1}{9}} \cdot 4^{0,25}} \right)^{-1}$

2 $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

3 $\sqrt[3]{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6}-7} \cdot 40^{\frac{1}{3}}$

Значення виразу

А -10

Б $\frac{1}{54}$

В 3

Г 1

Д 10

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** За законом Клейбера, швидкість основного обміну речовин (тобто потужність метаболізму) у тварин пропорційна масі тіла у степені $\frac{3}{4}$: $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}}$, де P — потужність обміну (Вт), M — маса тіла (кг), k — коефіцієнт пропорційності. Відомо, що для людини з масою 70 кг потужність метаболізму становить приблизно 80 Вт.
- Обчисліть коефіцієнт k .
 - Знайдіть орієнтовну потужність метаболізму для кішки з масою 4 кг і для слона з масою 5000 кг.
 - Порівняйте питомі обміни речовин (потужність на 1 кг маси тіла) у людини, кішки та слона. Зробіть висновки.

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
- 2)
- ?

Можливі теми проєктів

1. Степені з раціональними показниками у біології та в медицині.
2. Використання властивостей степенів з дробовими показниками у доведенні нерівностей.







