



Тема 1. Корені n -го степеня

Урок 11. Урок–практикум. Перетворення ірраціональних виразів

Тип уроку: урок повторення та систематизації знань.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над обчисленням значень ірраціональних виразів.
3. Робота в малих групах над спрощенням ірраціональних виразів.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте задачу на використання властивостей степенів з раціональними показниками. Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 2) На початку уроку запропонуйте учням/ученицям письмову перевірку відповідей до нескладних номерів домашнього завдання. За необхідності, зробіть аналіз якихось із запропонованих завдань.
- 3) Обговоріть фронтально «ідейні» задачі домашнього завдання. За необхідності, використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.

- 4) Учні/учениці об'єднуються в пари і працюють над наступною серією завдань. Учитель виступає у ролі консультанта та радника. Важливим елементом роботи є набуття навичок самоперевірки та взаємоперевірки.
- 5) Об'єднуємо клас у кілька груп (4 – 6 груп). Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті на різних уроках знання.
- 6) Один або декілька учнів/учениць можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та консультанта.
- 7) Запропонуйте учням та ученицям самостійну роботу (бліцтестування) у форматі завдань ЗНО на відповідність для визначення рівня сформованості вмінь та навичок розв'язання завдань зі степенями з раціональними показниками.
- 8) Об'єднуємо учнів та учениць у групи (такі самі, як на III етапі роботи).
- 9) Основна мета уроку — закріплення умінь та навичок щодо перетворень та обчислень значень ірраціональних виразів.
- 10) Додаткова мета — повторити властивості квадратного кореня та їхнє застосування.
- 11) Обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 12) Запропонуйте учням/ученицям індивідуальне домашнє завдання: дорозв'язавати обраний на занятті рівень тренувальних вправ, або розв'язати інший рівень, або розв'язати окремі завдання з усіх рівнів (оберіть для учнів/учениць схему, що відповідає засвоєнню ними теми на уроці та інших індивідуальних чинників). Зверніть їхню увагу на завдання практичного змісту.
- 13) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** За законом Клейбера, швидкість основного обміну речовин (тобто потужність метаболізму) у тварин пропорційна масі тіла у степені $\frac{3}{4}$: $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}}$, де P — потужність обміну (Вт), M — маса тіла (кг), k — коефіцієнт пропорційності. Відомо, що для людини з масою 70 кг потужність метаболізму становить приблизно 80 Вт.
- а) Обчисліть коефіцієнт k .
 - б) Знайдіть орієнтовну потужність метаболізму для кішки з масою 4 кг і для слона з масою 5000 кг.
 - в) Порівняйте питомі обміни речовин (потужність на 1 кг маси тіла) у людини, кішки та слона. Зробіть висновки.

II. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

Завдання для перевірки

1. Спростіть вираз $(32a^5b^{-10})^{0,4}$ при $a > 0, b > 0$.
2. Спростіть та обчисліть значення виразу $\frac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)^2}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}$.
3. Обчисліть значення ірраціонального виразу $\frac{a^3 + b^3}{a + b} - (a^2 + b^2)$ при $a = 4^{\frac{7}{4}}; b = 2^{\frac{1}{2}}$.
4. Скоротіть дріб $\frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b + a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}}$.
5. Розв'яжіть рівняння, враховуючи його ОДЗ: $x^{0,8} \cdot x^{1,2} - x^{0,8} \cdot x^{0,2} - 2 = 0$.
Відповідь. 1) $\frac{4a^2}{b^4}$; 2) $9\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)$; 3) -16 ; 4) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}$, при $a > 0, b \geq 0$; 5) 2 .

Завдання для обговорення

1. Подайте у вигляді степеня з основою x : $\frac{x^2 \sqrt{x^2 \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x \sqrt{x}}}$.
Вказівка. Треба врахувати ОДЗ і скористатися означенням степеня з дробовим показником та властивостями степенів.
Відповідь. $x^{\frac{37}{12}}$.
2. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}$. При яких значеннях змінних у даній нерівності досягається знак рівності?
Вказівка. Доцільно поділити обидві частини нерівності на $\sqrt{2}$ та застосувати для кожного кореня нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним невід'ємних чисел $|x|, |1-y|$ та $|y|, |1-x|$ відповідно, а також скористатися фактом, що число не перевищує свого модуля. Рівність досягається при виконанні умов $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$. Корисно знайти геометричний спосіб розв'язання даної нерівності і відповідної рівності, з використанням нерівності трикутника.
3. Для невід'ємних значень змінної доведіть, що функція $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$ набуває лише невід'ємних значень.
Вказівка. Застосуйте нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним для трьох чисел: $2x^3, x^3, 4$.

III. Робота в парах над обчисленням значень ірраціональних виразів

Означення. Коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) з даного числа a називають таке число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Означення. Арифметичним коренем n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$) з даного невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Відповідне значення позначають $\sqrt[n]{a}$.

1) При парному значенні n підкореневий вираз у такому запису завжди має бути невід'ємним.

2) При непарному значенні n підкореневий вираз може бути від'ємним, і тоді такий корінь не вважається арифметичним. Але дану ситуацію легко звести до арифметичного кореня, скориставшись формулою $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Корінь зі степеня		
Випадок	Властивості	Приклади
n — непарне	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$ $\sqrt[n]{a^n} = a. $	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5,$ $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2. $
n — парне	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a^n} = a . $	$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3,$ $\sqrt[6]{(-3)^6} = -3 = 3. $

Властивості арифметичних коренів n-го степеня		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з добутку: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$ $a \geq 0, b \geq 0.$	Корінь із добутку двох множників дорівнює добутку коренів із цих множників.	$\sqrt[3]{0,027 \cdot 8} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{8} = 0,3 \cdot 2 = 0,6,$ $\sqrt[4]{125 \cdot 5} = \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5. $
Корінь з дробу: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$ $a \geq 0, b > 0.$	Корінь із дробу дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.	$\sqrt[3]{\frac{0,125}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5,$ $\frac{\sqrt[3]{0,0625}}{\sqrt[3]{0,5}} = \sqrt[3]{\frac{0,0625}{0,5}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5. $
Степінь кореня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0. $	Для того, щоб піднести корінь до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, а потім добути корінь.	$\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2,$ $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32. $

<i>Властивості арифметичних коренів n-го степеня</i>		
Властивість	Правило	Приклади
Корінь з кореня: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$	Для добування кореня з кореня треба добути з підкореневого виразу один корінь, степінь якого дорівнює добутку показників даних коренів.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2,$ $\sqrt{\sqrt[5]{x^2+1}} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{x^2+1}} = \sqrt[10]{x^2+1}.$
Пониження степеня кореня: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0$	Якщо показник кореня та показник степеня підкореневого виразу домножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[15]{512} = \sqrt[5 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8},$ $\sqrt[6]{x^3+6x^2+12x+8} = \sqrt[6]{(x+2)^3} =$ $= \sqrt[3 \cdot 2]{(x+2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[2]{(x+2)^1} = \sqrt{x+2}.$

<i>Означення степенів з раціональними показниками</i>			
Випадок для показника степеня	Означення	ОДЗ	Приклади
n — натуральне число	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a^1 = a$	$a \in \mathbb{R}$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$ $-2^1 = -2.$
n — від'ємне ціле число	$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{-n}}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a \neq 0$	$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} =$ $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}.$
$n = 0$	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	$(-\pi)^0 = 1.$
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне додатне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a \geq 0$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4,$ $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0.$
$p = \frac{m}{n}$ — раціональне від'ємне число	$a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ ($m = -k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$)	$a > 0$	$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$

<i>Властивості степенів з раціональними показниками</i>		
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Множення степенів	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}}.$
Ділення степенів	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} = x^{-\frac{1}{15}}.$

<i>Властивості степенів з раціональними показниками</i>		
Дії зі степенями	Формула $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$	Приклади
Піднесення степеня до степеня	$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = x^{\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{2}} = x^{\frac{15}{10}} = x^{\frac{3}{2}}.$
Піднесення добутку до степеня	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(x^{\frac{1}{5}} y^{0,1}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \cdot \left(y^{0,1}\right)^{10} = x^2 y^1 = x^2 y.$
Піднесення частки до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{10} = \frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}{\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{10}} = \frac{x^2}{y^{\frac{15}{2}}}.$
Піднесення до степенів з протилежними показниками	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$

Завдання для роботи в парах

- Знайдіть значення виразу $2\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{62,5} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}} - \frac{\sqrt[3]{0,25} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$
- Обчисліть: $10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7 \left(2^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \frac{3}{2^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}}\right).$
- Знайдіть значення ірраціонального виразу $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{9 - 6\sqrt{2}} - 18^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{6}} - 1} + 3^{\frac{1}{3}}.$

IV. Робота в малих групах над перетворенням ірраціональних виразів

Завдання для роботи в малих групах

- Спростіть вираз $\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{1-x + \sqrt{1-x}} + \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1+x - \sqrt{1+x}}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} + \sqrt{1-x^2}.$ При яких значеннях змінних виконані перетворення є рівносильними?
- Спростіть вираз $\left(\frac{x^{0,75} - y}{x^{0,25} - y^{\frac{1}{3}}} - 3\sqrt[12]{x^3 y^4}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{x^{0,75} + y}{x^{0,25} + y^{\frac{1}{3}}} - \sqrt[3]{y^2}\right).$
- Спростіть вираз $\sqrt{a^3 - b^3 + \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{a^2} + \sqrt{b^3 + \sqrt{a}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2} - \sqrt{b^3 + \sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3 + b^3)^2 - a(4a^2 b^3 + 1)}}.$

V. Самостійна робота

7. Установіть відповідність між виразом (1–3) та значенням (А–Д) виразу.

Вираз

$$1 \left(\frac{8^{0,5} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{27^{-\frac{1}{9}} \cdot 4^{0,25}} \right)^{-1}$$

$$2 \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$$

$$3 \sqrt[3]{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6}-7} \cdot 40^{\frac{1}{3}}$$

Значення виразу

$$А -10$$

$$Б \frac{1}{54}$$

$$В 3$$

$$Г 1$$

$$Д 10$$

А Б В Г Д

1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. За законом Клейбера, швидкість основного обміну речовин (тобто потужність метаболізму) у тварин пропорційна масі тіла у степені $\frac{3}{4}$: $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}}$, де P — потужність обміну (Вт), M — маса тіла (кг), k — коефіцієнт пропорційності. Відомо, що для людини з масою 70 кг потужність метаболізму становить приблизно 80 Вт.

а) Обчисліть коефіцієнт k .

б) Знайдіть орієнтовну потужність метаболізму для кішки з масою 4 кг і для слона з масою 5000 кг.

в) Порівняйте питомі обміни речовин (потужність на 1 кг маси тіла) у людини, кішки та слона. Зробіть висновки.

Розв'язання. З формули $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}}$ випливає, що $k = P \cdot M^{-\frac{3}{4}}$.

Оскільки потужність метаболізму людини з масою 70 кг становить приблизно 80 Вт, то: $k \approx 80 \cdot 70^{-\frac{3}{4}} = \frac{80}{\sqrt[4]{70^3}} = \frac{80}{(\sqrt[4]{70})^3} \approx 3,31$.

Відповідно, можна передбачити потужність метаболізму тварин:

- кішка $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}} \approx 3,31 \cdot 4^{\frac{3}{4}} = 3,31 \cdot \sqrt[4]{4^3} \approx 9,36$ Вт;
- слон $P = k \cdot M^{\frac{3}{4}} \approx 3,31 \cdot 5000^{\frac{3}{4}} = 3,31 \cdot \sqrt[4]{5000^3} \approx 1972$ Вт.

Порахуємо та порівняємо питомі обміни речовин: $\frac{P}{M} = \frac{k \cdot M^{\frac{3}{4}}}{M} = \frac{k}{M^{\frac{1}{4}}} = \frac{k}{\sqrt[4]{M}}$.

Отже:

- кішка $\frac{P}{M} = \frac{k}{\sqrt[4]{M}} \approx \frac{3,31}{\sqrt[4]{4}} \approx 2,34$ Вт/кг;
- людина $\frac{P}{M} = \frac{k}{\sqrt[4]{M}} \approx \frac{3,31}{\sqrt[4]{70}} \approx 1,14$ Вт/кг;
- слон $\frac{P}{M} = \frac{k}{\sqrt[4]{M}} \approx \frac{3,31}{\sqrt[4]{5000}} \approx 0,39$ Вт/кг.

Наведена модель дає наближені показники, зокрема тому, що ми побудували універсальну для всіх видів константу k з одним даним (людина 70 кг, 80 Вт), а біологічні параметри можуть варіюватися між видами. Однак, за допомогою отриманої формули ми побачили тренд: потужність загального метаболізму зростає із масою (від 9,36 Вт у кішки до 1972 Вт у слона), але питома інтенсивність обміну зменшується із зростанням маси (від 2,34 Вт/кг у кішки до 0,39 Вт/кг у слона). Тобто, малі тварини спалюють набагато більше енергії на кожен кілограм маси. Це пояснює, чому миша або кішка їдять частіше й більше відносно маси, ніж слон — їхня теплова втрата й енергетичні потреби відносно маси вищі.

VII. Рефлексія

Запропонуйте учням/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
-
-
- 2)
-
-
- ?
-
-

Можливі теми проєктів

1. Степені з раціональними показниками у біології та в медицині.
2. Використання властивостей степенів з дробовими показниками у доведенні нерівностей.